Technische Universität Dresden

Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis

Momentungleichungen und zentrale Grenzwerteigenschaften isotroper konvexer Körper

Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von

Peter Hinow
geb. am 26. 11. 1974 in Dresden

Tag der Einreichung: 19. 10. 2000

Betreuer: Prof. Dr. Jürgen Voigt
Prof. Dr. Ulrich Brehm

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit stellt den Abschluß meines Mathematikstudiums an der Technischen Universität Dresden dar. Gern nutze ich die Gelegenheit, allen Lehrern, Mitstudenten und Freunden zu danken, die mich in den vergangenen fünf Jahren begleitet haben. Besonders herzlich danken möchte ich meinen Betreuern für ihre zahlreichen wertvollen Hinweise, ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre. Herr Prof. Dr. Jürgen Voigt hat in zahlreichen Diskussionen 100%ige Strenge gefordert; Herr Prof. Dr. Ulrich Brehm hat mir viele neue Einsichten in die Geometrie verschafft. Herr Dipl.-Math. Hendrik Vogt hat wichtige Anregungen zum Beweis von Lemma 5.2 gegeben, auch dafür sehr herzlichen Dank. Schließlich danke ich meiner Familie für ihre konstante Liebe und Unterstützung.

1 Einleitung

Ein fundamentales Ergebnis der Konvexgeometrie ist die Brunn-Minkowski-Ungleichung, die gegen Ende des 19. Jahrhunderts von Hermann Brunn und Hermann Minkowski bewiesen wurde.

Satz 1.1 (Brunn-Minkowski). ([Ball-1997], Theorem 5.2) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex, kompakt und $t \in [0,1]$. Die Minkowski-Summe von A und B ist die Menge

$$(1-t)A + tB = \{(1-t)u + tv \,:\, u \in A,\, v \in B\}\,.$$

Dann gilt für das Lebesgue-Maß λ_n der Minkowski-Summe

$$\lambda_n((1-t)A + tB)^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)\lambda_n(A)^{\frac{1}{n}} + t\lambda_n(B)^{\frac{1}{n}}\,.$$

Es sei noch erwähnt, daß der Satz 1935 durch Liusternik auf beliebige kompakte Mengen ausgedehnt wurde. Obwohl die Definition der Konvexität einfach ist, bildet sie den Ausgangspunkt zu einer sehr reichhaltigen Theorie mit vielen schönen und tiefliegenden Ergebnissen. Die Konvexgeometrie hat Anwendungen in vielen anderen Bereichen der Mathematik gefunden, so zum Beispiel in der Funktionalanalysis, in der mathematischen Stochastik und auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Eine kurze Geschichte der Konvexgeometrie enthält der Artikel von Peter Gruber [Gru-1993].

Seit einiger Zeit interessiert man sich besonders für asymptotische Eigenschaften konvexer Körper. Darunter sind Aussagen zu verstehen, die für Körper hoher Dimension „immer besser“ gelten. Ein Beispiel ist der folgende 1961 von Arie Dvoretzky bewiesene Satz, der später von Vitali Milman verbessert wurde.

Satz 1.2 (Dvoretzky, Milman). ([Pi-1989], Theorem 4.3 und Remark (i)) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\eta(\varepsilon) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer symmetrischer Körper mit $0 \in \mathit{int}\, K$ und $k = k(\varepsilon, n) = \lfloor \eta(\varepsilon) \ln n \rfloor$. Dann besitzt K einen k-dimensionalen Schnitt, der $(1+\varepsilon)$-äquivalent zu einem Ellipsoid ist, d.h. es existiert ein linearer Teilraum F mit $\mathit{dim}\, F = k$ und ein euklidisches Ellipsoid $D \subset F$, so daß gilt

$$D \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)D\,.$$

Man kann sagen, daß jeder konvexe symmetrische Körper der Dimension n „fast-sphärische“ Schnitte der Dimension $\approx \ln n$ besitzt oder daß jeder n-dimensionale Banach-Raum einen „fast-euklidischen“ Unterraum besitzt. Weitere Aspekte der Konvexgeometrie in hohen Dimensionen finden sich in den Übersichten [Ball-1997] und [Mi-1996].

Im zentralen Grenzwertsatz zeigt sich die beherrschende Rolle der Gaußschen Normalverteilung als Grenzverteilung von normalisierten Summen von unabhängigen Zufallsgrößen. Die klassische Formulierung nach de Moivre und Laplace trifft eine Aussage über binomialverteilte Zufallsgrößen, die folgende verallgemeinerte Fassung stammt von Lindeberg und Feller.

Satz 1.3 (Lindeberg und Feller). ([ChowTei-1988], Chapter 9.1, Theorem 1) Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige Zufallsgrößen mit Mittelwert 0, Varianzen $\mathbf{E}X_n^2 = \sigma_n^2 < \infty$ und Verteilungsfunktionen F_n. Weiter bezeichnen

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n X_i \, , \\ s_n^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \, , \end{aligned}$$

sowie

$$G_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \, dt \tag{1}$$

die Normalverteilung mit Varianz σ^2. Genau dann konvergieren die Verteilungsfunktionen der normalisierten Summen S_n/s_n gleichmäßig gegen die standardisierte Normalverteilung G_1 und es gelten

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{s_n} = 0 \, ,$$

wenn die Lindeberg-Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n \int\limits_{|x|>\varepsilon s_n} x^2 \, dF_i(x) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt ist.

Betrachten wir jetzt als Beispiel die n-dimensionale euklidische Kugel $B_n^2 = B_n^2(0, r_{n,2})$ vom Volumen 1 (für den genauen Wert von $r_{n,2}$ s. (10)). Wir interessieren uns für die „Verteilung“ des Volumens in einer fixierten Richtung, d.h. für die Volumina von Schnitten mit Hyperebenen. Nach [Ball-1997], Lecture 1 ist das Volumen näherungsweise normalverteilt und zwar mit Varianz $1/(2\pi e)$. Speziell befinden sich etwa 96% des Volumens in der $\frac{1}{2}$-Umgebung eines jeden $(n-1)$-dimensionalen linearen Unterraums H, d.h. in der Menge

$$H_{\frac{1}{2}} \cap B_n^2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d_2(x, H) \leq \frac{1}{2}\} \cap B_n^2 \, .$$

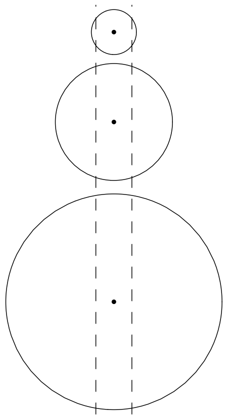

Abbildung 1: Massenverteilung für Kugeln

Das ist umso erstaunlicher, da der Radius $r_{n,2}$ einer solchen Kugel etwa wie $\sqrt{n}$ wächst.

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall eines allgemeinen Phänomens, daß wir im folgenden untersuchen wollen. Für isotrope konvexe Körper K vom Volumen 1 und Einheitsvektoren $u \in S^{n-1}$ werden Zufallsgrößen $X_u : K \to \mathbb{R}$ definiert. Eine Menge von solchen Körpern besitzt eine zentrale Grenzwerteigenschaft, wenn die Dichten dieser Zufallsgrößen nahe bei geeigneten Gauß-Dichten liegen. Verschiedene Formulierungen werden in den Artikeln [ABP-1998] und [BreVoi-2000] eingeführt. In engem Zusammenhang mit derartigen zentralen Grenzwerteigenschaften stehen Massenkonzentrations-Eigenschaften, wie sie in [Voi-2000] beschrieben werden. Als Bedingungen für eine solche Massenkonzentration werden dort zwei Ungleichungen für das zweite bzw. vierte Moment des betreffenden Körpers angegeben. Weiterhin wird gezeigt, daß die Menge $\mathcal{T}$ aller normierten isotropen konvexen Körper, die die Ungleichungen (8) und (9) erfüllen, abgeschlossen ist unter bestimmten Operationen, wie z.B. Kegelbildung und der Bildung von cartesischen Produkten. Die Untersuchungen in [BreVoi-2000] und [Voi-2000] dienen als Ausgangspunkt für diese Arbeit.

Isoperimetrische Probleme wurden bereits im Altertum formuliert, so z.B. das klassische Problem der karthagischen Königin Dido. Seit etwa 1970 wurden analoge Fragen von Vitali Milman in metrischen Maßräumen untersucht ([MiSch-1986], [Mi-1996]). Ist (X, d) ein metrischer Raum und μ ein Maß auf der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}(X)$, so sucht man unter allen Mengen mit gleichem Maß nach solchen mit kleinster „Oberfläche“. Dieses verallgemeinerte isoperimetrische Problem wurde in einer Reihe von konkreten Situatuionen gelöst, so z.B. auf der Einheitssphäre S^{n-1}. Von besonderem Interesse sind solche Ergebnisse in Zusammenhang mit dem Phänomen der Massenkonzentration in hohen Dimensionen.

Es zeigt sich z.B. im Fall der Sphäre S^{n-1}, daß in der Umgebung einer Halbsphäre fast alle Punkte liegen, obwohl es durchaus „weit“ entfernte Punkte gibt. Man kann sagen, daß in hohen Dimensionen Maß und Metrik immer schlechter zusammenpassen.

Im dieser Diplomarbeit soll untersucht werden, wie Massenkonzentrations-Eigenschaften zentrale Grenzwerteigenschaften nach sich ziehen. Im Abschnitt 3 wird die Abgeschlossenheit der Menge $\mathcal{T}$ unter einer weiteren Operation, der Verbindungsumme, gezeigt. Im Abschnitt 4 wird zunächst eine zentrale Grenzwerteigenschaft für Verteilungsfunktionen bewiesen. Dabei wird ein Ergebnis von Heinrich von Weizsäcker benutzt, das eine Konvergenz von Maßen liefert [vWeiz-1997]. Anschließend wird in Abschnitt 5 gezeigt, daß aus der $\|\cdot\|_\infty$-Konvergenz der Verteilungen die $\|\cdot\|_\infty$-Konvergenz der Dichten folgt. Eine entscheidende Rolle spielt dabei die Tatsache, daß die betrachteten Dichten logarithmisch konkav sind. In Abschnitt 6 wird das isoperimetrische Problem auf der Sphäre S^{n-1} untersucht, sowie Folgerungen aus seiner Lösung gezogen. In Abschnitt 7 wird ein Variationsproblem für signierte Maße auf der Sphäre S^{n-1} untersucht. Modellprobleme dieser Art könnten im Zusammenhang mit der Frage nach dem maximalen zweiten Moment eines normierten isotropen konvexen Körpers stehen.

2 Definitionen und Probleme

In der gesamten Arbeit sei der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $(e^j)_{j=1,\dots,n}$, dem Standardskalarprodukt

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

und der Norm $|u| = \sqrt{(u|u)}$ versehen[1]. Die Einheitssphäre $\{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\}$ bezeichnen wir mit S^{n-1}, ihre Oberfläche beträgt (s. [Kö-1993], Kapitel 9.3)

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \,. \tag{2}$$

Auf der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}(S^{n-1})$ existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das invariant ist unter orthogonalen Abbildungen ([MiSch-1986], Theorem 1.1); wir bezeichnen es mit μ_{n-1}.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $u, v \in M$ die Verbindungsstrecke $\overline{uv}$ zu M gehört. Unter einem konvexen *Körper* verstehen wir eine konvexe, kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren. Das

[1] untere Indizes bezeichnen stets Komponenten, obere Indizes verschiedene Vektoren

n-dimensionale Lebesgue-Maß von K bezeichnen wir mit $\lambda_n(K)$. Das zweite bzw. vierte Moment des Körpers K sind folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} m_2(K) &= \int_K |x|^2\,dx\,, \\ m_4(K) &= \int_K |x|^4\,dx\,. \end{aligned}$$

Ist das Volumen eines konvexen Körpers K gleich 1 und befindet sich sein Schwerpunkt im Koordinatenursprung, so heißt K *normiert.* Zu jedem konvexen Körper K mit Schwerpunkt 0 existiert ein eindeutig bestimmtes Ellipsoid $L(K)$, so daß für alle $u \in S^{n-1}$ folgendes gilt ([MiPa-1989], Section 1.1)

$$\int_K (x|u)^2\,dx = \int_{L(K)} (x|u)^2\,dx\,.$$

$L(K)$ heißt das *Legendresche Trägheitsellipsoid* von K. Ist dieses Trägheitsellipsoid eine euklidische Kugel, so heißt K *isotrop.* In diesem Fall ist das Integral

$$L_K^2 = \int_K (x|u)^2\,dx$$

unabhängig von $u \in S^{n-1}$. Die Zahl L_K heißt *Trägheitsradius* des Körpers K. Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\det T \neq 0$, so folgt mit Hilfe des Transformationssatzes für alle $u \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \int_{L(T(K))} (x|u)^2\,dx &= \int_{T(K)} (x|u)^2\,dx = |\det T|^{-1} \int_K (y|u)^2\,dy \\ &= |\det T|^{-1} \int_{L(K)} (y|u)^2\,dy = \int_{T(L(K))} (x|u)^2\,dx \end{aligned}$$

und somit

$$L(T(K)) = T(L(K))\,.$$

Zu jedem konvexen Körper K gibt es daher ein affines Bild $A(K)$, das normiert und isotrop ist. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und isotrop, so besteht zwischen dem Trägheitsradius und dem zweiten Moment der folgende Zusammenhang

$$\int_K |x|^2 dx = \int_K (x_1^2 + \cdots + x_n^2)\,dx = nL_K^2\,. \tag{3}$$

Es bezeichne $\mathcal{K}_n$ die Menge der n-dimensionalen normierten isotropen konvexen Körper und

$$\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \, .$$

Einen Körper $K \in \mathcal{K}_n$ fassen wir als Wahrscheinlichkeitsraum $(K, \mathcal{B}(K), \lambda_n)$ auf; dabei bezeichne $\mathcal{B}(K)$ die σ-Algebra der Borel-Mengen. Für jeden Einheitsvektor $u \in S^{n-1}$ definieren wir eine Zufallsgröße $X_u : K \to \mathbb{R}$ durch

$$X_u(x) = (x|u) \, .$$

Die Dichtefunktion dieser Zufallsgröße ist durch

$$\varphi_{K,u}(t) = \lambda_{n-1}(\{x \in K \, : \, (x|u) = t\}) \tag{4}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben (s. Abbildung 2). Weiter bezeichne

$$g_{\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{5}$$

die Dichte einer Gaußschen Zufallsgröße mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2 sowie $\mathbf{E}$ den Erwartungswert bezüglich μ_{n-1}.

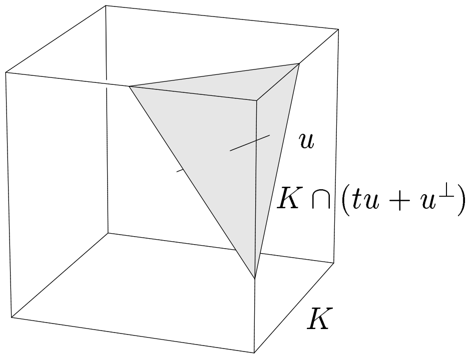

Abbildung 2: Zur Definition der Dichtefunktion

Definition 2.1. Eine Menge $\mathcal{M}$ von normierten isotropen konvexen Körpern besitzt eine *zentrale Grenzwerteigenschaft*, wenn eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{M}} \mathbf{E} \, \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \, , \tag{6}$$

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{M}} \mathbf{E} \, \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_1 \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \, . \tag{7}$$

In der Arbeit [BreVoi-2000] werden einige spezielle Mengen von Körpern untersucht. Es wird bewiesen, daß die Mengen aller Würfel und aller euklidischen Kugeln die Grenzwerteigenschaften (6) und (7) besitzen. Ferner wird für die Menge der regulären Simplizes eine Version von (6) und (7) gezeigt, dabei werden jedoch nicht alle Richtungen $u \in S^{n-1}$, sondern nur eine diskrete Teilmenge untersucht. Gleichzeitig wird die Vermutung ausgesprochen, daß die Menge $\mathcal{K}$ aller normierten isotropen konvexen Körper die Grenzwerteigenschaften (6) und (7) besitzt.

In dem Artikel [Voi-2000] wird gezeigt, daß für normierte isotrope Körper $K \in \mathcal{K}_n$, deren Volumen sich in der Nähe einer Sphäre vom Radius $\sqrt{n}L_K$ konzentriert, die Höldersche Ungleichung

$$1 \leq \int_K |x|^2 dx \left(\int_K \frac{1}{|x|} dx \right)^2$$

für $n \to \infty$ asymptotisch zu einer Gleichheit wird. Mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung werden als Bedingungen für eine solche Massenkonzentration die beiden folgenden Ungleichungen für das zweite und vierte Moment des Körpers K angegeben

$$m_2(K) \leq \frac{n}{(n+1)(n+2)} \frac{n!^{\frac{2}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \tag{8}$$

$$\frac{m_4(K)}{m_2(K)^2} \leq \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n+1} \right). \tag{9}$$

Dabei sind die Ausdrücke auf den rechten Seiten die entsprechenden Werte für das normierte reguläre Simplex Δ_n. Die folgende Definition ist aus [Voi-2000] entnommen.

Definition 2.2. Es bezeichne $\mathcal{T}_n$ die Menge aller Körper $K \in \mathcal{K}_n$, die die Ungleichungen (8) und (9) erfüllen und

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \, .$$

In den Arbeiten [Voi-2000] und [BVV-2000] wird bewiesen, daß die Menge $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter verschiedenen Operationen, wie z.B. Kegelbildung und der Bildung von normierten p-Produkten. Spezielle p-Produkte sind Joins ($p = 1$) und cartesische Produkte ($p = \infty$). Insbesondere enthält $\mathcal{T}$ die normierten $|\cdot|_p$-Kugeln für alle $p \in [1, \infty]$

$$B_n^p = B_n^p(0, r_{n,p}) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq r_{n,p}^p\} \, ;$$

dabei ist $r_{n,p}$ so zu wählen, daß $\lambda_n(B_n^p) = 1$ gilt. Spezialfälle sind Kreuzpolytope ($p = 1$)

$$X_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x|_1 \leq \frac{n!^{\frac{1}{n}}}{2}\} ,$$

euklidische Kugeln ($p = 2$)

$$\begin{aligned} B_n^2 = B_n^2(0, r_{n,2}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x|_2 \leq r_{n,2}\} , \\ r_{n,2} &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \tag{10}$$

und Würfel ($p = \infty$)

$$C_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n .$$

Weiterhin enthält $\mathcal{T}$ die normierten regulären Simplizes

$$\Delta_n = \left(\frac{n!}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_{n+1}\} .$$

(Es ist üblich, das Simplex Δ_n in den $\mathbb{R}^{n+1}$ einzubetten.)

3 Die Verbindungssumme

Definition 3.1. Seien $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ normierte isotrope konvexe Körper und $n = n_1 + n_2 + 1$. Wir definieren die (unnormierte) *Verbindungssumme* der beiden Körper wie folgt

$$K_1 \hat{\bullet} K_2 = \{(\lambda x', (1-\lambda)x'', \lambda) \ : \ x' \in K_1, x'' \in K_2, \lambda \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Die Verbindungssumme zweier Strecken ergibt z.B. ein Simplex in $\mathbb{R}^3$, d.h. ein Tetraeder. Zur Abkürzung setzen wir für $\lambda \in [0,1]$

$$K_\lambda = \{(\lambda x', (1-\lambda)x'', \lambda) \ : \ x' \in K_1, \ x'' \in K_2\}.$$

Unser erstes Ziel ist es, ein affines Bild von $K_1 \hat{\bullet} K_2$ zu finden, das ebenfalls normiert und isotrop ist. Dazu bestimmen wir zunächst das Volumen mit Hilfe der Eulerschen Beta-Funktion

$$\begin{aligned} \lambda_n(K_1 \hat{\bullet} K_2) &= \int_0^1 \lambda_{n-1}(K_\lambda)\, d\lambda = \int_0^1 \lambda^{n_1}(1-\lambda)^{n_2}\, d\lambda \\ &= B(n_2+1, n_1+1) = \frac{\Gamma(n_2+1)\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(n_1+n_2+2)} \\ &= \frac{n_1! n_2!}{n!} . \end{aligned}$$

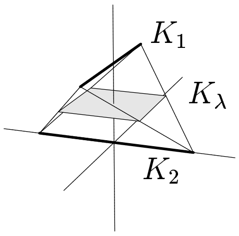

Abbildung 3: Zur Definition der Verbindungssumme

Die einzige von 0 verschiedene Schwerpunktskoordinate ist die in λ-Richtung, die wir mit λ_S bezeichnen wollen,

$$
\begin{aligned}
\lambda_S &= \frac{1}{\lambda_n(K_1 \hat{\bullet} K_2)} \int\limits_0^1 \int\limits_{K_\lambda} \lambda \, d(x', x'') \, d\lambda = \frac{(n_1+n_2+1)!}{n_1! n_2!} \int\limits_0^1 \lambda^{n_1+1}(1-\lambda)^{n_2} \, d\lambda \\
&= \frac{(n_1+n_2+1)!}{n_1! n_2!} B(n_2+1, n_1+2) = \frac{(n_1+n_2+1)!}{n_1! n_2!} \frac{(n_1+1)! n_2!}{(n_1+n_2+2)!} \\
&= \frac{n_1+1}{n_1+n_2+2} \, .
\end{aligned}
$$

Um zu erreichen, daß der Schwerpunkt 0 ist, ist somit eine Verschiebung um $r = (0, \ldots, 0, -\lambda_S)^T$ erforderlich. Da K_1 und K_2 isotrop sind, ist die Funktion

$$
u \mapsto \int\limits_{K_1 \hat{\bullet} K_2 + r} (x|u)^2 \, dx
$$

konstant auf $S^{n_1-1} \times \{0\} \times \{0\}$ und $\{0\} \times S^{n_2-1} \times \{0\}$. Wir erhalten demnach ein isotropes Bild von $K_1 \hat{\bullet} K_2 + r$, wenn wir eine lineare Abbildung T des Typs

$$
T = \operatorname{diag}(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{n_1-\text{mal}}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{n_2-\text{mal}}, \alpha_3)
$$

auf $K_1 \hat{\bullet} K_2 + r$ anwenden. Dabei sind wegen (3) die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ so zu bestimmen, daß für das Bild $T(K_1 \hat{\bullet} K_2 + r)$ die folgenden Integrale übereinstimmen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n_1} \int\limits_{T(K_1 \hat{\bullet} K_2 + r)} |x'|^2 \, d(x', x'', \lambda) &= \frac{1}{n_2} \int\limits_{T(K_1 \hat{\bullet} K_2 + r)} |x''|^2 \, d(x', x'', \lambda) \\
&= \int\limits_{T(K_1 \hat{\bullet} K_2 + r)} |\lambda|^2 \, d(x', x'', \lambda) \, .
\end{aligned}
$$

Wir berechnen nun die zweiten Momente in den x'-, x''- und λ-Richtungen

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{K_1 \hat{\bullet} K_2 + r} |x'|^2 \, d(x', x'', \lambda) &= \int\limits_0^1 \int\limits_{K_\lambda} |x'|^2 d(x', x'') \, d\lambda \\
&= \int\limits_0^1 (1-\lambda)^{n_2} \int\limits_{K_1} \lambda^{n_1+2} |x'|^2 \, dx' \, d\lambda = m_2(K_1) \, B(n_2+1, n_1+3) \\
&= m_2(K_1) \frac{(n_1+2)! n_2!}{(n+2)!} \, .
\end{aligned}
$$

Analog ergibt sich

$$
\int\limits_{K_1 \hat{\bullet} K_2 + r} |x''|^2 \, d(x', x'', \lambda) = m_2(K_2) \frac{n_1!(n_2+2)!}{(n+2)!} \, ,
$$

und

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{K_1 \hat{\bullet} K_2 + r} |\lambda|^2 \, d(x', x'', \lambda) &= \int\limits_0^1 \int\limits_{K_\lambda} (\lambda - \lambda_S)^2 \, d(x', x'') \, d\lambda \\
&= \int\limits_0^1 (\lambda^2 - 2\lambda_S \lambda + \lambda_S^2) \lambda^{n_1} (1-\lambda)^{n_2} \, d\lambda \\
&= B(n_2+1, n_1+3) - 2\lambda_S B(n_2+1, n_1+2) + \lambda_S^2 B(n_2+1, n_1+1) \\
&= \frac{n_2!(n_1+2)!}{(n_1+n_2+3)!} - 2 \frac{n_1+1}{n_1+n_2+2} \frac{n_2!(n_1+1)!}{(n_1+n_2+2)!} + \frac{(n_1+1)^2}{(n_1+n_2+2)^2} \frac{n_2! n_1!}{(n_1+n_2+1)!} \\
&= \frac{(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!(n+1)} \, .
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich dadurch die folgenden Gleichungen für α_1, α_2 und α_3

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^{n_1+2} \alpha_2^{n_2} \alpha_3 \frac{m_2(K_1)}{n_1} \frac{(n_1+2)! n_2!}{(n+2)!} &= \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2+2} \alpha_3 \frac{m_2(K_2)}{n_2} \frac{n_1!(n_2+2)!}{(n+2)!} \\
&= \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^3 \frac{(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!(n+1)}
\end{aligned}
$$

und vereinfacht

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^2 \frac{m_2(K_1)(n_1+1)(n_1+2)}{n_1} &= \alpha_2^2 \frac{m_2(K_2)(n_2+1)(n_2+2)}{n_2} \qquad (11) \\
&= \alpha_3^2 \frac{(n_1+1)(n_2+1)}{n+1} \, .
\end{aligned}
$$

Hinzu kommt die Bedingung $\lambda_n(T(K_1\hat{\bullet}K_2+r))=1$, die so aussieht

$$\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\alpha_3=\frac{n!}{n_1!n_2!}\,. \tag{12}$$

Das Einsetzen von (11) in (12) liefert für α_3

$$\alpha_3=\left[\frac{n!}{n_1!n_2!}\left[\frac{(n_1+2)(n+1)m_2(K_1)}{n_1(n_2+1)}\right]^{\frac{n_1}{2}}\left[\frac{(n_2+2)(n+1)m_2(K_2)}{n_2(n_1+1)}\right]^{\frac{n_2}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{13}$$

für unsere weiteren Betrachtungen brauchen wir α_1 und α_2 nicht explizit zu berechnen. Wir ändern jetzt die Definition 3.1 folgendermaßen

$$K_1\bullet K_2=\{(\alpha_1\lambda x',\alpha_2(1-\lambda)x'',\alpha_3(\lambda-\lambda_S))\ :\ x'\in K_1,\ x''\in K_2,\ \lambda\in[0,1]\}\,.$$

Unser nächstes Ziel ist es, die Abgeschlossenheit der Klasse $\mathcal{T}$ unter Bildung von Verbindungssummen nachzuweisen. Dazu ist zu zeigen, daß die Momentungleichungen (8) und (9) erhalten bleiben. Zunächst behandeln wir die Ungleichung (8). Wir verwenden die Beziehungen (3), (12) und (13);

$$\begin{aligned}
n\int\limits_{K_1\bullet K_2}|\lambda|^2\,d(x',x'',\lambda)&=\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\alpha_3^3\frac{n(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!(n+1)}\\
=\ &\frac{n!}{n_1!n_2!}\left[\frac{n!}{n_1!n_2!}\left[\frac{(n_1+2)(n+1)m_2(K_1)}{n_1(n_2+1)}\right]^{\frac{n_1}{2}}\left[\frac{(n_2+2)(n+1)m_2(K_2)}{n_2(n_1+1)}\right]^{\frac{n_2}{2}}\right]^{\frac{2}{n}}\\
&\cdot\frac{n(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!(n+1)}\overset{?}{\leq}\frac{n}{(n+1)(n+2)}\frac{n!^{\frac{2}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\,.
\end{aligned}$$

Da beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung nichtnegativ sind, erhalten wir eine äquivalente Ungleichung, indem wir sie in die n-te Potenz zu erheben, nachdem wir zuvor durch $n/(n+1)$ dividiert haben. Zu zeigen bleibt folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{n!}{n_1!n_2!}\right]^{n+2}\left[\frac{(n_1+2)(n+1)m_2(K_1)}{n_1(n_2+1)}\right]^{n_1}\left[\frac{(n_2+2)(n+1)m_2(K_2)}{n_2(n_1+1)}\right]^{n_2}\\
&\cdot\left[\frac{(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!}\right]^{n}\leq\frac{n!^2}{(n+1)(n+2)^n}\,.
\end{aligned}$$

Benutzen wir die Voraussetzung, daß die Körper K_1 und K_2 die Ungleichung (8) erfüllen, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& \left[\frac{n!}{n_1!n_2!}\right]^{n+2} \left[\frac{(n_1+2)(n+1)m_2(K_1)}{n_1(n_2+1)}\right]^{n_1} \left[\frac{(n_2+2)(n+1)m_2(K_2)}{n_2(n_1+1)}\right]^{n_2} \\
& \cdot \left[\frac{(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!}\right]^{n} \\
\leq \; & \left[\frac{n!}{n_1!n_2!}\right]^{n+2} \left[\frac{(n_1+2)(n+1)n_1 n_1!^{\frac{2}{n_1}}}{n_1(n_2+1)(n_1+1)(n_1+2)(n_1+1)^{\frac{1}{n_1}}}\right]^{n_1} \\
& \cdot \left[\frac{(n_2+2)(n+1)n_2 n_2!^{\frac{2}{n_2}}}{n_2(n_1+1)(n_2+1)(n_2+2)(n_2+1)^{\frac{1}{n_2}}}\right]^{n_2} \left[\frac{(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n+2)!}\right]^{n} \\
= \; & \frac{n!^n n!^2}{n_1!^n n_1!^2 n_2!^n n_2!^2} \frac{(n+1)^{n_1} n_1!^2}{(n_2+1)^{n_1}(n_1+1)^{n_1+1}} \frac{(n+1)^{n_2} n_2!^2}{(n_1+1)^{n_2}(n_2+1)^{n_2+1}} \\
& \cdot \frac{n_1!^n (n_1+1)^n n_2!^n (n_2+1)^n}{n!^n (n+1)^n (n+2)^n} \\
= \; & \frac{(n+1)^{n-1} n!^2 (n_1+1)^n (n_2+1)^n}{(n_2+1)^n (n_1+1)^n (n+1)^n (n+2)^n} = \frac{n!^2}{(n+1)(n+2)^n} \,,
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war. Gleichheit liegt in dem Fall vor, daß es sich bei K_1 und K_2 um Siplizes handelt. Für das vierte Moment berechnen wir die folgenden Integrale

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{K_1 \bullet K_2} |x'|^4 \, dx &= \alpha_1^{n_1+4} \alpha_2^{n_2} \alpha_3 \int_0^1 \int\limits_{K_\lambda} |x|^4 \, d(x', x'') \, d\lambda \\
&= \alpha_1^{n_1+4} \alpha_2^{n_2} \alpha_3 \, m_4(K_1) \int_0^1 \lambda^{n_1+4} (1-\lambda)^{n_2} \, d\lambda \\
&= \alpha_1^{n_1+4} \alpha_2^{n_2} \alpha_3 \, m_4(K_1) \, \frac{(n_1+4)! n_2!}{(n_1+n_2+5)!} \\
\int\limits_{K_1 \bullet K_2} |x''|^4 \, dx &= \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2+4} \alpha_3 \, m_4(K_2) \, \frac{n_1!(n_2+4)!}{(n_1+n_2+5)!} \\
\int\limits_{K_1 \bullet K_2} |\lambda|^4 \, dx &= \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^5 \int_0^1 \int\limits_{K_\lambda} (\lambda - \lambda_S)^4 \, d(x', x'') \, d\lambda \\
&= \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^5 \, \frac{3(n_1+1)!(n_2+1)!}{(n_1+n_2+5)!} \\
& \quad \cdot \frac{(n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2 + 3(n_1^2 + n_2^2) + 2n_1 n_2 + 5(n_1+n_2) + 4)}{(n_1+n_2+2)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{K_1\bullet K_2} |x'|^2|x''|^2\,dx &= \alpha_1^{n_1+2}\alpha_2^{n_2+2}\alpha_3 \int_0^1 \int\limits_{K_\lambda} |x'|^2\,|x''|^2\,d(x',x'')\,d\lambda \\
&= \alpha_1^{n_1+2}\alpha_2^{n_2+2}\alpha_3 \int_0^1 \lambda^{n_1+1}(1-\lambda)^{n_2+1}\,d\lambda \\
&= \alpha_1^{n_1+2}\alpha_2^{n_2+2}\alpha_3\, m_2(K_1)m_2(K_2)\,\frac{(n_1+2)!(n_2+2)!}{(n_1+n_2+5)!} \\
\int\limits_{K_1\bullet K_2} |x'|^2|\lambda|^2\,dx &= \alpha_1^{n_1+2}\alpha_2^{n_2}\alpha_3^3\, m_2(K_1) \\
&\quad \cdot \frac{(n_1+2)!(n_2+1)!(n_1^2+n_1n_2+3n_1+7n_2+8)}{(n_1+n_2+5)!} \\
\int\limits_{K_1\bullet K_2} |x''|^2|\lambda|^2\,dx &= \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2+2}\alpha_3^3\, m_2(K_2) \\
&\quad \cdot \frac{(n_1+1)!(n_2+2)!(n_2^2+n_1n_2+7n_1+3n_2+8)}{(n_1+n_2+5)!}\,.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich für den uns interessierenden Quotienten

$$
\begin{aligned}
n^2 f(n)\frac{m_4(K_1\bullet K_2)}{m_2(K_1\bullet K_2)^2} &= n_1^2\frac{m_4(K_1)}{m_2(K_1)^2}f(n_1) + n_2^2\frac{m_4(K_2)}{m_2(K_2)^2}f(n_2) + 2n_1n_2 \\
&\quad +2n_1 g(n_1,n_2) + 2n_2 g(n_2,n_1) + h(n_1,n_2)\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)}\,, \\
g(n_1,n_2) &= \frac{n_1^2+n_1n_2+3n_1+7n_2+8}{(n_1+1)(n_1+n_2+2)}
\end{aligned}
$$

und

$$
h(n_1,n_2) = 3\,\frac{n_1^2n_2+n_1n_2^2+3(n_1^2+n_2^2)+2n_1n_2+5(n_1+n_2)+4}{(n_1+1)(n_2+1)(n_1+n_2+2)}\,.
$$

Nehmen wir jetzt die Voraussetzung zu Hilfe, daß die Körper K_1 und K_2 die

Ungleichung (9) erfüllen, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& n^2 \frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)} \frac{m_4(K_1 \bullet K_2)}{m_2(K_1 \bullet K_2)^2} \\
= \; & n_1^2 \frac{m_4(K_1)}{m_2(K_1)^2} \frac{(n_1+3)(n_1+4)}{(n_1+1)(n_1+2)} + n_2^2 \frac{m_4(K_2)}{m_2(K_2)^2} \frac{(n_2+3)(n_2+4)}{(n_2+1)(n_2+2)} \\
& + 2n_1n_2 + 2n_1 g(n_1,n_2) + 2n_2 g(n_2,n_1) + h(n_1,n_2) \\
\leq \; & n_1^2 \left(1 + \frac{2}{n_1} + \frac{6}{n_1+1}\right) + n_2^2 \left(1 + \frac{2}{n_2} + \frac{6}{n_2+1}\right) + 2n_1n_2 \\
& + 2n_1 \frac{n_1^2 + n_1n_2 + 3n_1 + 7n_2 + 8}{(n_1+1)(n_1+n_2+2)} + 2n_2 \frac{n_2^2 + n_1n_2 + 3n_2 + 7n_1 + 8}{(n_2+1)(n_1+n_2+2)} \\
& + 3 \frac{n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2 + 3(n_1^2+n_2^2) + 2n_1n_2 + 5(n_1+n_2) + 4}{(n_1+1)(n_2+1)(n_1+n_2+2)} \\
= \; & \frac{(n_1+n_2+1)(n_1^2+n_2^2+2n_1n_2+11n_1+11n_2+12)}{(n_1+n_2+2)} = n^2 + 2n + \frac{6n^2}{n+1}
\end{aligned}
$$

Dies ist aber äquivalent zu Ungleichung (9). Wieder liegt Gleicheit vor, wenn es sich bei K_1 und K_2 um Simplizes handelt. Die Menge $\mathcal{T}$ aus Definition 2.2 ist somit abgeschlossen unter der Bildung von Verbindungssummen.

4 Die zentrale Grenzwerteigenschaft für Verteilungsfunktionen

Im folgenden bezeichne K stets einen normierten isotropen konvexen Körper. Die Hölder-Ungleichung liefert (mit $p = 3$, $q = 3/2$)

$$
1 = \int_K \frac{|x|^{\frac{2}{3}}}{|x|^{\frac{2}{3}}} \, dx \leq \left(\int_K |x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_K \frac{1}{|x|} \, dx \right)^{\frac{2}{3}},
$$

daraus folgt

$$
1 \leq \int_K |x|^2 \, dx \left(\int_K \frac{1}{|x|} \, dx \right)^2 .
$$

Für bestimmte Mengen von Körpern wird diese Ungleichung asymptotisch zu einer Gleichung. In [Voi-2000] wird der folgende Satz bewiesen.

Satz 4.1. Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ eine Menge von normierten isotropen konvexen Körpern, die die folgenden Bedingungen erfüllt

(i) $\sup_{K\in\mathcal{M}} L_K^2 < \infty$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{M}} \lambda_n(\{x\in K : \left||x|^2 - nL_K^2\right| \geq \varepsilon n L_K^2\}) \to 0$$

für $n \to \infty$.

Dann gilt

$$\sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{M}} \int\limits_K |x|^2 dx \left(\int\limits_K \frac{1}{|x|} dx\right)^2 \to 1 \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Die Gültigkeit von Bedingung (i) für die Menge $\mathcal{K}$ wird in [MiPa-1989] als „allgemein akzeptierte Hypothese“ bezeichnet, jedoch ist das Problem offen und wird von mehreren Arbeitsgruppen intensiv untersucht. Die Bedingung (ii) kann so interpretiert werden, daß sich asymptotisch für $n \to \infty$ der größte Teil der Gesamtmasse 1 in der Nähe einer Sphäre vom Radius $\sqrt{n}L_K$ befindet. Bei festem $\varepsilon > 0$ muß auch die Dicke der Schale proportional zu $\sqrt{n}L_K$ gewählt werden. In der Arbeit [Voi-2000] wird bewiesen, daß die Momentungleichungen (8) und (9) die Voraussetzungen von Satz 4.1 nach sich ziehen (s.u.). Erfüllen nämlich alle Körper $K \in \mathcal{M}$ die Momentungleichung (8), so folgt mit (3) und der Stirlingschen Formel

$$L_K^2 = \frac{1}{n} m_2(K) \leq \frac{(n!)^{2/n}}{(n+1)^{1+1/n}(n+2)} \approx \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^2 (2\pi n)^{1/n}}{(n+1)^{1+1/n}(n+2)}, \tag{14}$$

dieser Ausdruck konvergiert für $n \to \infty$ gegen $\frac{1}{e^2}$. Weiter gilt mit der Tschebyscheffschen Ungleichung (angewendet auf $|x|^2$) und (9)

$$\begin{aligned}
&\lambda_n(\{x\in K : \left||x|^2 - nL_K^2\right| \geq \varepsilon n L_K^2\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2 L_K^4} \int\limits_K \left||x|^2 - nL_K^2\right|^2 dx \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^2 n^2 L_K^4} \left(\int\limits_K |x|^4 dx - 2nL_K^2 \int\limits_K |x|^2 dx + n^2 L_K^4 \right) \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^2 m_2(K)^2} \left(m_4(K) - 2m_2(K)^2 + m_2(K)^2 \right) \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{m_4(K)}{m_2(K)^2} - 1 \right) \\
\leq \;& \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n+1} \right) - 1 \right),
\end{aligned}$$

dieser Ausdruck konvergiert gegen 0 für alle $\varepsilon > 0$. Wir wollen jetzt daraus eine zentrale Grenzwerteigenschaft für die Verteilungsfunktionen

$$\Phi_{K,u}(t) = \lambda_n(\{x \in K \;:\; (x|u) \leq t\})$$

herleiten.

Wir bezeichnen mit $Prob(\mathbb{R})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Eine Folge $(P_n) \subset Prob(\mathbb{R})$ konvergiert gegen ein $P \in Prob(\mathbb{R})$ *nach Verteilung*, wenn die Verteilungsfunktionen $F_n(t) = P_n((-\infty, t])$ punktweise an allen Stetigkeitsstellen der Grenzverteilung $F(t) = P((-\infty, t])$ konvergieren. Die Konvergenz nach Verteilung ist metrisierbar, eine mögliche Metrik ist die Lévy-Metrik. Seien $P, Q \in Prob(\mathbb{R})$ und F, G die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Dann ist der Lévy-Abstand wie folgt definiert ([ChowTei-1988], Section 8.1, Theorem 3)

$$\begin{aligned} L(P,Q) = L(F,G) = \inf \{\varepsilon > 0 \quad : \quad & F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon \\ & \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\} \,. \end{aligned}$$

Sei $0 < c \leq 1$ und $\tilde{F}(t) = F(ct)$ sowie $\tilde{G}(t) = G(ct)$. Dann gilt für den Lévy-Abstand folgende Abschätzung

$$L(F(\cdot), G(\cdot)) \leq L(\tilde{F}(\cdot), \tilde{G}(\cdot)) = L(F(c\,\cdot), G(c\,\cdot)) \,. \tag{15}$$

Sei nämlich $\varepsilon \geq L(F(c\,\cdot), G(c\,\cdot))$, d.h. es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F(cx - c\varepsilon) - \varepsilon \leq G(cx) \leq F(cx + c\varepsilon) + \varepsilon \,.$$

Da $c \leq 1$ ist und da F monoton wachsend ist, folgen

$$F(cx - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(cx - c\varepsilon) - \varepsilon \leq G(cx) \leq F(cx + c\varepsilon) + \varepsilon \leq F(cx + \varepsilon) + \varepsilon$$

und somit $\varepsilon \geq L(F(\cdot), G(\cdot))$. Durch Übergang zum Infimum ergibt sich (15).

Für das von einer Dichtefunktion f auf $\mathbb{R}$ erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß schreiben wir

$$f\lambda_1(B) = \int\limits_B f(t)\, d\lambda_1(t) \,.$$

Wir erinnern uns an die Bezeichnung g_{σ^2} für die Gaußsche Dichte gemäß (5). Wir wollen ein Resultat von Heinrich von Weizsäcker über „typische Marginale“ anwenden. Es bezeichnen P_K und $\tilde{P}_K$ die folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\begin{aligned} P_K(B) &= \lambda_n(B \cap K) \,, \\ \tilde{P}_K(B) &= P_K(L_K B) = \lambda_n(L_K B \cap K) \,, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,. \end{aligned}$$

Da K isotrop ist, gilt für die Kovarianzmatrix von $\tilde{P}_K$

$$\mathcal{C}_K = \left(\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\tilde{P}_K(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} = L_K^n \left(\int_{(1/L_K)K} x_i x_j \, dx \right)_{i,j=1,\dots,n} = I_n \, ;$$

somit sind die Bedingungen (9) und (10) aus [vWeiz-1997]

$$\begin{aligned} \operatorname{spur} \mathcal{C} &= O(n) \, , \\ \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{C}_{ij}^2 &= o(n^2) \end{aligned}$$

erfüllt. Für die Dichten bzw. die Verteilungen des „gestauchten" Maßes $\tilde{P}_K$ gilt

$$\begin{aligned} L_K \varphi_{K,u}(L_K t) &= \tilde{\varphi}_{K,u}(t) \, , \\ \Phi_{K,u}(L_K t) &= \tilde{\Phi}_{K,u}(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach [vWeiz-1997], Corollary 1 gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : L(\varphi_{K,u}\lambda_1, \int_K g_{\frac{|x|^2}{n}} \, dx \lambda_1) > \varepsilon\}) \to 0$$

für $n \to \infty$. Wegen der Eigenschaft (ii) aus Satz 4.1 ist für $\tilde{P}_K$ die Bedingung (11) aus [vWeiz-1997] erfüllt, d.h. es gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \tilde{P}_K\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \left| \frac{|x|}{\sqrt{n}} - 1 \right| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \, .$$

Daher kann die Mischung $\int_K g_{\frac{|x|^2}{n}} \, dx \lambda_1$ durch die Normalverteilung $g_1 \lambda_1$ ersetzt werden ([vWeiz-1997], S. 316, 10. Zeile von oben). Da für die Trägheitsradien $L_K \leq 1$ gilt, folgt mit (15) für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : L(\varphi_{K,u}\lambda_1, g_{L_K^2}\lambda_1) > \varepsilon\}) \qquad (16) \\ \leq & \sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : L(\tilde{\varphi}_{K,u}\lambda_1, g_1\lambda_1) > \varepsilon\}) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \, . \end{aligned}$$

Lemma 4.2. Sei $K \in \mathcal{K}_n$ und $u \in S^{n-1}$. Dann gilt für die Dichte $\varphi_{K,u}$

$$\|\varphi_{K,u}\|_\infty \leq \sqrt{2\pi e}.$$

Beweis Es bezeichne $B_n^2 = B_n^2(0, r_{n,2})$ die auf Volumen 1 normierte euklidische Kugel (s. (10)). Wegen (3) gilt

$$nL_K^2 = \int_K |x|^2 dx \geq \int_{B_n^2} |x|^2 dx = nL_{B_n^2}^2 \, ,$$

da die Norm eines Vektors in $K\backslash B_n^2$ stets größer ist als die eines Vektors in $B_n^2\backslash K$. Für den Trägheitsradius der normierten Kugel gilt (s. [BreVoi-2000], Section 3)

$$\begin{aligned} L_{B_n^2}^2 &= \frac{1}{n}\int\limits_{B_n^2} |x|^2 dx = \frac{1}{n}\sigma_{n-1}\int\limits_0^{r_{n,2}} r^{n+1} dr \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{2}{n}}}{(n+2)\pi} \approx \frac{n\sqrt{2\pi\frac{n}{2}}^{\frac{2}{n}}}{2e(n+2)\pi} \searrow \frac{1}{2\pi e}\,, \end{aligned}$$

(σ_{n-1} bezeichnet die Oberfläche von S^{n-1} gemäß (2)). Für alle $K \in \mathcal{K}_n$ gilt also

$$L_K \geq L_{B_n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\,. \tag{17}$$

Nach einem Resultat von Fradelizi ([Fra-1999], Corollary 2) gilt für jeden konvexen isotropen Körper $K \subset \mathbb{R}^n$, dessen Schwerpunkt sich im Ursprung befindet und jeden Einheitsvektor $u \in S^{n-1}$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\lambda_{n-1}((K+x)\cap u^\perp)}{\lambda_n(K)^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{1}{L_K}\,.$$

Ist speziell $x = tu$, $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda_n(K) = 1$, dann erhalten wir

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(K \cap (u^\perp + tu)) \leq \frac{1}{L_K} \leq \frac{1}{L_{B_n^2}} \leq \sqrt{2\pi e}\,.$$

□

Eine weitere Metrik auf $Prob(\mathbb{R})$ ist die Kolmogorov-Metrik (s. [Ra-1991], Definition 2.1.2)

$$\rho(P,Q) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| = \|F-G\|_\infty\,.$$

Sei nun $m > 0$. Wir bezeichnen mit $Prob_{AC,m}(\mathbb{R})$ die Menge aller absolut-stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, für deren Dichten f

$$\|f\|_\infty \leq m$$

gilt. Auf dieser Menge kann die Kolmogorov-Metrik durch die Lévy-Metrik abgeschätzt werden.

Lemma 4.3. Seien $P, Q \in Prob_{AC,m}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\rho(P,Q) \leq (1+m)L(P,Q)\,. \tag{18}$$

Beweis Seien F und G die zu P bzw. Q gehörigen Verteilungsfunktionen und $x \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\|F - G\|_\infty = |F(x) - G(x)|$$

gilt (ein solches x existiert, da F und G stetig sind und für $x \to \pm\infty$ die gleichen Grenzwerte besitzen). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $|F(x) - G(x)| = F(x) - G(x)$ gilt. Sei $\varepsilon \geq L(P, Q)$. Dann gilt

$$G(x) \geq F(x - \varepsilon) - \varepsilon \geq F(x) - m\varepsilon - \varepsilon$$

und somit

$$(1 + m)\varepsilon \geq F(x) - G(x) = \|F - G\|_\infty .$$

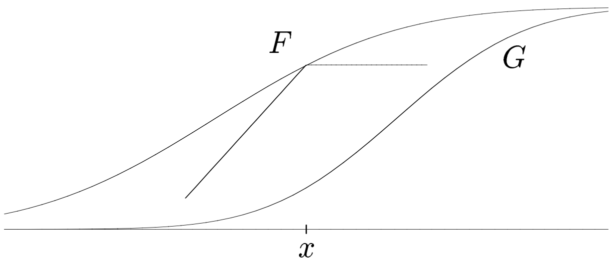

Abbildung 4: Zum Beweis von Lemma 4.3

Der Übergang zum Infimum liefert (18). □

Wir wenden jetzt (18) an, um aus der Konvergenz nach Verteilung in (16) die gleichmäßige Konvergenz der Verteilungsfunktionen zu erhalten. Sei $c = 1 + \sqrt{2\pi e}$ und bezeichne G_{σ^2} die Gauß-Verteilung gemäß (1), dann folgt

$$\begin{aligned}
& \sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : \|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty > \varepsilon\}) && (19)\\
\leq\ & \sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : cL(\varphi_{K,u}\lambda_1, g_{L_K^2}\lambda_1) > \varepsilon\}) \\
=\ & \sup_{K \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : L(\varphi_{K,u}\lambda_1, g_{L_K^2}\lambda_1) > \frac{\varepsilon}{c}\}) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt für den Erwartungswert bezüglich μ_{n-1} und ein $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty &= \int\limits_{S^{n-1}} \|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty \, d\mu_{n-1}(u) \\
&= \int\limits_{\{u\in S^{n-1}:\|\cdots\|_\infty\le\varepsilon\}} \|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty \, d\mu_{n-1}(u) \\
&\quad + \int\limits_{\{u\in S^{n-1}:\|\cdots\|_\infty>\varepsilon\}} \|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty \, d\mu_{n-1}(u) \\
&\le \varepsilon + \mu_{n-1}(\{u \in S^{n-1} : \|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty > \varepsilon\})\,.
\end{aligned}
$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt für das Supremum der folgende

Satz 4.4. Die Menge $\mathcal{T}$ besitzt die zentrale Grenzwerteigenschaft für Verteilungsfunktionen

$$
\sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{T}} \mathbf{E}\,\|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.
$$

5 Zentrale Grenzwerteigenschaften für Dichtefunktionen

Wir wollen jetzt aus der Gültigkeit von Satz 4.4 für die Menge $\mathcal{T}$ entsprechende Ergebnisse für die zugehörigen Dichten herleiten.

Satz 5.1 (Brunn). ([Ball-1997], Theorem 5.1) Sei K ein konvexer Körper und $u \in S^{n-1}$. Dann ist die Funktion $\varphi_{K,u}(\cdot)^{\frac{1}{n-1}}$ auf ihrem Träger konkav.

Wegen der Konkavität und der Monotonie des Logarithmus gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\ln\varphi_{K,u}(tx+(1-t)y) &= \ln\left(\varphi_{K,u}(tx+(1-t)y)^{\frac{1}{n-1}}\right) \\
&\ge \ln(t\,\varphi_{K,u}(x)^{\frac{1}{n-1}} + (1-t)\,\varphi_{K,u}(y)^{\frac{1}{n-1}}) \\
&\ge t\ln\varphi_{K,u}(x)^{\frac{1}{n-1}} + (1-t)\ln\varphi_{K,u}(y)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \frac{t}{n-1}\ln\varphi_{K,u}(x) + \frac{1-t}{n-1}\ln\varphi_{K,u}(y)\,,
\end{aligned}
$$

d.h. $\ln\varphi_{K,u}$ ist auf $\mathbb{R}$ konkav (mit der üblichen Konvention $\ln 0 = -\infty$). Eine logarithmisch konkave Funktion f kann dargestellt werden als

$$
f = \exp(-\psi) \tag{20}
$$

mit einer konvexen Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (bei $e^{-\infty} = 0$). Eine konvexe Funktion $\psi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I ist stetig und für alle $x \in I$ existieren die links- und rechtsseitigen Ableitungen, die die Ungleichung

$$\psi_l'(x) \le \psi_r'(x) .$$

erfüllen. Die Funktion f aus (20) ist stetig auf dem Inneren ihres Trägers, dort existieren ebenfalls die links- und rechtsseitigen Ableitungen, für diese gilt

$$f_{l/r}'(x) = -\psi_{l/r}'(x) \exp(-\psi) ,$$

und

$$\frac{f_{l/r}'(x)}{f(x)} = -\psi_{l/r}'(x) .$$

Daraus folgt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x_0 + t) &= \exp(-\psi(x_0 + t)) \le \exp(-\psi(x_0) - t\psi_{l/r}'(x_0)) \\ &= f(x_0) \exp\left(t \frac{f_{l/r}'(x_0)}{f(x_0)}\right) . \end{aligned} \tag{21}$$

Da ψ höchstens ein lokales Minimum besitzt, kann f höchstens ein lokales Maximum haben. Wir führen für $c, d > 0$ folgende Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c &= \{f : \mathbb{R} \to [0, \infty) \ : \ f \text{ ist logarithmisch konkav,} \\ &\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \,,\ \|f\|_\infty \le c\} \\ \mathcal{G}_d &= \{g : \mathbb{R} \to [0, \infty) \ : \ g \in C^1(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1,\ \|g'\|_\infty \le d\}. \end{aligned}$$

Die zu einer Dichte f gehörige Verteilungsfunktion bezeichnen wir mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt .$$

Lemma 5.2. Zu gegebenen $c, d > 0$ gibt es eine Konstante C, so daß für alle $f \in \mathcal{F}_c$, $g \in \mathcal{G}_d$ gilt

$$\|f - g\|_\infty \le C\sqrt{\|F - G\|_\infty} . \tag{22}$$

Beweis Wir wählen zunächst

$$L = \max\{d, 4c^2 + 1\} . \tag{23}$$

Wir betrachten zuerst diejenigen $x_0 \in \mathbb{R}$ für die $f(x_0) \le g(x_0)$ gilt. Wir nehmen an, daß f auf $(-\infty, x_0]$ monoton wachsend ist. (Der Fall daß f auf $[x_0, \infty)$ monoton fallend ist, wird analog behandelt.) Wir setzen $\eta = \frac{g(x_0)-f(x_0)}{L}$. Wegen $\|g'\|_\infty \le d \le L$ gilt $g(t) \ge g(x_0) + L(t - x_0)$ für alle $t \in [x_0 - \eta, x_0]$ und somit

$$\begin{aligned} 2\|F-G\|_\infty &\ge \int_{x_0-\eta}^{x_0} (g(t) - f(t))\,dt \ge \int_{x_0-\eta}^{x_0} (g(x_0) + L(t-x_0) - f(x_0))\,dt \\ &\ge \frac{(g(x_0) - f(x_0))^2}{2L}\,, \end{aligned}$$

daraus folgt

$$g(x_0) - f(x_0) \le 2\sqrt{L\|F-G\|_\infty}\,.$$

Sei jetzt $f(x_0) \ge g(x_0)$. Wir wählen

$$\delta = \sqrt{\frac{\|F-G\|_\infty}{L}}\,. \tag{24}$$

Wir nehmen an, es würde gelten

$$f(x_0) - g(x_0) \ge 4\delta L\,. \tag{25}$$

Sei I das maximale Intervall um x_0 mit $f(x) - g(x) \ge 2\delta L$ sowie $a = \inf I$ und $b = \sup I$. Für die Länge des Intervalls I gilt

$$2\|F-G\|_\infty \ge \int_a^b (f(t) - g(t))\,dt \ge 2\delta L(b-a)\,,$$

daraus folgt $b - a \le \|F-G\|_\infty/(\delta L) = \delta$. Wegen $\|g'\|_\infty \le d \le L$ gilt für alle $t \in [a, b]$

$$|g(t) - g(x_0)| \le \delta L\,.$$

Wir nehmen zunächst an, daß f in a und b stetig ist, dann gilt $f(a) - g(a) = f(b) - g(b) = 2\delta L$, daraus folgen

$$f(x_0) \ge f(a) + \delta L \quad \text{und} \quad f(x_0) \ge f(b) + \delta L\,.$$

In diesem Fall existieren $x_1 \in [a, x_0]$ und $x_2 \in [x_0, b]$ mit

$$f_l'(x_1) \ge \frac{\delta L}{\delta} = L, \quad \text{und} \quad f_r'(x_2) \le -\frac{\delta L}{\delta} = -L.$$

Ist a eine Sprungstelle von f, dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x < a$; ist b eine Sprungstelle von f, dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x > b$. In diesem Fall setzen wir

$x_1 = a$ bzw. $x_2 = b$ und die Integrale $\int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,dt$ bzw. $\int_{x_2}^{\infty} f(t)\,dt$ verschwinden. Andernfalls läßt sich mit Hilfe der Ungleichung (21) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{\infty} f(x)\,dx$$

wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x_1 + t)\,dt \le f(x_1) \int_{-\infty}^{0} \exp\left(t \frac{f_l'(x_1)}{f(x_1)}\right) dt \\
&= f(x_1) \left[\frac{f(x_1)}{f_l'(x_1)} \exp\left(t \frac{f_l'(x_1)}{f(x_1)}\right)\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{f(x_1)^2}{f_l'(x_1)} \le \frac{c^2}{L} .
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\int_{x_2}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f(x_2 + t)\,dt \le \frac{c^2}{L} ,$$

und

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \le \delta c .$$

Insgesamt ergibt sich mit (23) und (24)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &\le \frac{2c^2}{L} + \delta c \le \frac{2c^2}{4c^2+1} + \sqrt{\frac{\|F-G\|_\infty}{L}}c \\
&\le \frac{2c^2}{4c^2+1} + \sqrt{\frac{c^2}{4c^2+1}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß f die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist. Die Annahme (25) ist daher falsch und es gilt

$$\|f - g\|_\infty \le 4\delta L = 4\sqrt{L\|F-G\|_\infty} .$$

$\square$

Satz 5.3. Die Menge $\mathcal{T}$ aus Definition 2.2 besitzt die zentralen Grenzwerteigenschaften (6) und (7).

Beweis Es genügt, die Konvergenz der Dichten bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm nachzuweisen. Die Eigenschaft (7) folgt dann aus [BreVoi-2000], Proposition 2.5 zusammen mit der Tatsache

$$\sup_{K\in\mathcal{T}} L_K < \infty \,.$$

Diese Eigenschaft ist aber nach (14) eine Folgerung aus den Momentungleichungen. Wegen Lemma 4.2 sind Voraussetzungen von Lemma 5.2 an $\varphi_{K,u}$ mit $c = \sqrt{2\pi e}$ erfüllt. Ferner sind wegen (17) die Varianzen der $g_{L_K^2}$ nach unten beschränkt (für d kann $\sqrt{2\pi e}$ gewählt werden). Mit (19) und (22) folgt daher

$$\begin{aligned}
& \sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u\in S^{n-1} : \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty > \varepsilon\}) \\
\leq \; & \sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u\in S^{n-1} : 4\sqrt{L\|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty} > \varepsilon\}) \\
= \; & \sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{T}} \mu_{n-1}(\{u\in S^{n-1} : \|\Phi_{K,u} - G_{L_K^2}\|_\infty > \frac{\varepsilon^2}{16L}\}) \to 0
\end{aligned}$$

für $n\to\infty$. Für den Erwartungswert bezüglich μ_{n-1} gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty &= \int\limits_{S^{n-1}} \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty \, d\mu_{n-1}(u) \\
&= \int\limits_{\{u\in S^{n-1}:\|\ldots\|_\infty\leq\varepsilon\}} \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty \, d\mu_{n-1}(u) + \\
&\quad + \int\limits_{\{u\in S^{n-1}:\|\ldots\|_\infty>\varepsilon\}} \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty \, d\mu_{n-1}(u) \\
&\leq \varepsilon + \mu_{n-1}(\{u\in S^{n-1} : \|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty > \varepsilon\})
\end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$ und somit für das Supremum

$$\sup_{K\in\mathcal{K}_n\cap\mathcal{T}} \mathbf{E}\,\|\varphi_{K,u} - g_{L_K^2}\|_\infty \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty \,. \tag{26}$$

□

Die Menge $\mathcal{T}$ enthält mit den Simplizes insbesondere auch nicht-zentralsymmetrische Körper. Die Frage, ob alle normierten isotropen Körper die Ungleichungen (8) und (9) erfüllen, ist offen (s. Abschnitt 8).

6 Isoperimetrische Ungleichungen und Massenkonzentration

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Es existieren in der Literatur verschiedene Definitionen für den „Oberflächeninhalt“ von ∂A, die jedoch für Mengen mit genügend glattem Rand den gleichen Wert liefern ([Oss-1978], Section 2). Wir setzen voraus, daß ∂A diesen Bedingungen genügt und definieren die äußere Minkowski-Oberfläche von A durch ([Tal-1996], Definition (3.2))

$$\omega_{n-1}(\partial A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\lambda_n(A + \varepsilon B_n^2(0,1)) - \lambda_n(A)}{\varepsilon} \,. \tag{27}$$

Das klassische isoperimetrische Problem besteht darin, zu einem gegebenen $\alpha \in \mathbb{R}$ unter allen kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit genügend glattem Rand und $\lambda_n(A) = \alpha$ eine Menge $\tilde{A}$ zu finden, so daß gilt

$$\omega_{n-1}(\partial \tilde{A}) \leq \omega_{n-1}(\partial A) \,.$$

Seit langem ist bekannt, daß für die euklidische Kugel B mit $\lambda_n(B) = \alpha$ gilt

$$\omega_{n-1}(\partial B) \leq \omega_{n-1}(\partial A) \,. \tag{28}$$

Ein eleganter Beweis mit Hilfe der Brunn-Minkowskischen Ungleichung findet sich in [Ball-1997], Theorem 5.3. Die Aussage (28) kann auch ohne Verwendung der Minkowski-Oberfläche formuliert werden. Zunächst definieren wir für ein $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung einer Menge A durch

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d_2(x, A) \leq \varepsilon\} \,, \tag{29}$$

dabei bezeichne d_2 den euklidischen Abstand.

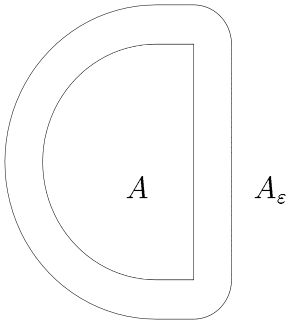

Abbildung 5: Zur Definition der ε-Umgebung

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben und bezeichne B die euklidische Kugel mit $\lambda_n(B) = \alpha$. Dann gilt für alle kompakten Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n(A) = \alpha$ und alle $\varepsilon > 0$ ([Ball-1997], Lecture 8)

$$\lambda_n(B_\varepsilon) \leq \lambda_n(A_\varepsilon) \,. \tag{30}$$

Aus (30) folgt (28) mit Hilfe von (27), vorausgesetzt der Grenzwert existiert. Diese Eigenschaft ermöglicht es, das isoperimetrische Problem auf beliebige metrische

Maßräume zu verallgemeinern. Es sei (X,d) ein metrischer Raum und μ ein Maß auf der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}(X)$. Für eine Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ und ein $\varepsilon > 0$ ist die ε-Umgebung A_ε völlig analog zu (29) definiert. Das verallgemeinerte isoperimetrische Problem besteht darin, zu gegebenem $\alpha > 0$ eine Borel-Menge $\tilde{A}$ mit $\mu(\tilde{A}) = \alpha$ zu finden, so daß für alle weiteren Borel-Mengen A mit $\mu(A) = \alpha$ die Ungleichung

$$\mu(\tilde{A}_\varepsilon) \leq \mu(A_\varepsilon) \tag{31}$$

für alle (oder alle hinreichend kleinen) $\varepsilon > 0$ erfüllt ist. Dieses verallgemeinerte Problem wurde in einer Reihe von konkreten Situationen gelöst, so z.B. in hyperbolischen Räumen und in $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Gaußschen Maß γ_n ([MiSch-1986], [Ball-1997]). Ein weiterer Spezialfall wurde 1919 von Paul Lévy behandelt. Wir betrachten die Sphäre (S^{n-1}, d) mit dem geodätischen Abstand d (d.h. der Länge des kleineren der beiden Großkreisbögen durch zwei Punkte) und dem rotationsinvarianten Wahrescheinlichkeitsmaß μ_{n-1}. Das Maß einer Kugelkappe vom Radius r mit Mittelpunkt u ergibt sich als

$$\mu_{n-1}(B(u,r)) = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{-\pi/2}^{r-\pi/2} \cos^{n-2}\theta \, d\theta \,. \tag{32}$$

Der folgende Satz besagt, daß die Lösungen von (31) genau die Kugelkappen sind.

Satz 6.1. Sei $A \subset S^{n-1}$ abgeschlossen und B eine d-Kugel mit $\mu_{n-1}(A) = \mu_{n-1}(B)$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu_{n-1}(B_\varepsilon) \leq \mu_{n-1}(A_\varepsilon) \,. \tag{33}$$

Ein Beweis, der sich an den Ideen von Lévy orientiert, findet sich in [MiSch-1986], Appendix 1. Er benutzt Methoden der globalen Variationsrechnung und der Geometrie auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Der folgende induktive Beweis aus der Arbeit [FLM-1977] beruht auf einer sehr eleganten Symmetrisierungsmethode. Wir benötigen zunächst einige Vorbereitungen. Für eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset S^{n-1}$ sei der Radius $r(A)$ durch

$$r(A) = \min\{r \geq 0 \;:\; \exists x \in S^{n-1},\; A \subset B(x,r)\} \tag{34}$$

definiert. Das Minimum in (34) wird aus folgendem Grund stets angenommen. Sei $B(x_k, r_k)$ eine Folge von Sphären mit $A \subset B(x_k, r_k)$ und $r_k \to r := \inf\{\dots\}$. Da S^{n-1} kompakt ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß (x_k) konvergent ist, sei $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und k hinreichend groß $A \subset B(x_k, r_k) \subset B(x, r+\varepsilon)$. Die Menge $\mathfrak{M}$ aller nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von S^{n-1} wird mit dem Hausdorff-Abstand

$$\delta(S,T) = \min\{r \geq 0 \;:\; S \subset T_r, T \subset S_r\}$$

zu einem kompakten metrischen Raum (S^{n-1} ist kompakt, s. [Ed-1990], §2.4).

Lemma 6.2. Der Radius $r : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ ist bezüglich des Hausdorff-Abstandes δ stetig, genauer gilt für abgeschlossene nichtleere Mengen A, A'

$$|r(A) - r(A')| \leq \delta(A, A') .$$

Beweis Seien $A, A' \in \mathfrak{M}$ und $\delta(A, A') \leq \eta$. Es gibt ein $u \in S^{n-1}$ mit $A \subset B(u, r(A))$. Dann gilt $A' \subset A_\eta \subset B(u, r(A) + \eta)$ und somit $r(A') \leq r(A) + \eta$. Durch Vertauschen der Rollen folgt aber auch $r(A) \leq r(A') + \eta$ und schließlich $|r(A) - r(A')| \leq \eta$. □

Lemma 6.3. Das Maß μ_{n-1} ist auf $\mathfrak{M}$ von oben halbstetig, d.h. aus $\delta(A^k, A) \to 0$ folgt

$$\mu_{n-1}(A) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_{n-1}(A^k) . \tag{35}$$

Beweis Da $(\mathfrak{M}, \delta)$ ein metrischer Raum ist, reicht es aus, (35) zu zeigen. Es bezeichne

$$\limsup_{k\to\infty} A^k = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq m} A^k .$$

Wegen $\delta(A^k, A) \to 0$ gibt es eine Folge $(r_k) \subset \mathbb{R}$ mit $r_k \to 0$, so daß gilt $A^k \subset A_{r_k}$. Da A abgeschlossen ist, folgt daraus

$$\limsup_{k\to\infty} A^k \subset A .$$

Aus der σ-Additivität und der Monotonie von μ_{n-1} folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_{n-1}(A^k) \leq \mu_{n-1}(\limsup_{k\to\infty} A^k) \leq \mu_{n-1}(A) ,$$

was zu beweisen war. □

Wir definieren jetzt die sphärische Symmetrisierung analog zur bekannten Steiner-Symmetrisierung an einer Hyperebene. Sei γ ein Halbkreis, der die Punkte $p, -p \in S^{n-1}$ verbindet und $\gamma^* = \gamma \setminus \{p, -p\}$. Für ein $y \in \gamma$ bezeichnen wir mit H^y die Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die senkrecht zu der Verbindungsstrecke von p und $-p$ (durch den Ursprung) steht und y enthält. Für $y \in \gamma^*$ definieren wir weiter $S^{n-2,y} = H^y \cap S^{n-1}$, $A^y = A \cap H^y$; $\mu_{n-2,y}$ bezeichne das rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf $S^{n-2,y}$. Im Fall $y = \pm p$ sei $\mu_{n-2,y}$ das Dirac-Maß δ_y. Mit B^y bezeichnen wir die abgeschlossene Kugel in $S^{n-2,y}$, deren Mittelpunkt y ist und für die

$$\mu_{n-2,y}(B^y) = \mu_{n-2,y}(A^y)$$

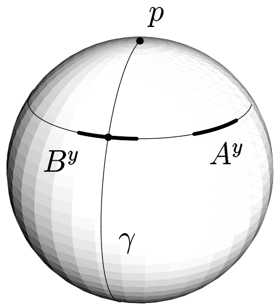

Abbildung 6: Zur Definition der Symmetrisierung

gilt, falls $\mu_{n-2,y}(A^y) > 0$ ist. Andernfalls ist $B^y = \{y\}$ oder $B^y = \emptyset$, je nachdem, ob A^y nichtleer oder leer ist.
Wir definieren die Symmetrisierung von A bezüglich γ durch

$$B = \sigma_\gamma(A) = \bigcup_{y\in\gamma} B^y\,. \tag{36}$$

Lemma 6.4. Die Funktion $y \mapsto \mu_{n-2,y}(A^y) = \mu_{n-2,y}(B^y)$ ist von oben halbstetig.

Beweis Sei $(y_k) \subset \gamma$ eine Folge mit $y_k \to y$ und bezeichne u den Mittelpunkt des Halbkreises γ. Es bezeichne $\tau : S^{n-1} \setminus \{p, -p\} \to S^{n-2,u}$ die Projektion längs der Meridiane auf die Äquatorsphäre $S^{n-1} \cap p^\perp$. Sei $z \in \limsup\limits_{k\to\infty} \tau(A^{y_k})$, d.h.

$$z \in \bigcup_{k\geq m} \tau(A^{y_k}) \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}\,.$$

Dann existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $k \geq m$ mit $z \in \tau(A^{y_k})$, sei $x^k \in A^{y_k}$ mit $\tau(x^k) = z$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß die Folge (x^k) konvergent ist, sei $x = \lim_{k\to\infty} x^k$. Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in A$ und somit $x \in A^y$. Da τ stetig bezüglich des geodätischen Abstands d ist, gilt $\tau(x) = \tau(\lim_{k\to\infty} x^k) = \lim_{k\to\infty} \tau(x^k) = z$ und somit $z \in \tau(A^y)$. Wegen der Monotonie des Maßes und weil τ die Maße $\mu_{n-2,y}$ bewahrt, gilt

$$\begin{aligned}\mu_{n-2,y}(A^y) &= \mu_{n-2,u}\tau(A^y) \geq \mu_{n-2,u}\left(\limsup_{k\to\infty} \tau(A^{y_k})\right) \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \mu_{n-2,u}\left(\tau(A^{y_k})\right) = \limsup_{k\to\infty} \mu_{n-2,y_k}(A^{y_k})\,.\end{aligned}$$

□

Wir wollen jetzt zeigen, daß die sphärische Symmetrisierung (36) abgeschlossen ist. Sei dazu $(x_k) \subset B$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$. Dann existieren $y_k \in \gamma$

mit $x_k \in B^{y_k}$. Ist $\bar{y} = \lim_{k\to\infty} y_k$, so gilt wegen Lemma 6.4 für die Radien der Sphären B^{y_k} und $B^{\bar{y}}$

$$\limsup_{k\to\infty} r_k \leq \bar{r}\,,$$

und somit $\bar{x} \in B^{\bar{y}}$. Damit ist gezeigt, daß B abgeschlossen (und somit auch meßbar) ist. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}\mu_{n-1}(B) &= \frac{2\pi\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{\gamma} \mu_{n-2,y}(B^y) \sin\angle(y,p)^{n-2}\, d\mu_1(y) \\ &= \frac{2\pi\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{\gamma} \mu_{n-2,y}(A^y) \sin\angle(y,p)^{n-2}\, d\mu_1(y) = \mu_{n-1}(A)\,.\end{aligned}$$

Lemma 6.5. Sei $A \subset S^{n-1}$ abgeschlossen und bezeichne

$$\begin{aligned} M(A) = \{C \subset S^{n-1} \;:\; & C \text{ ist abgeschlossen}\,,\ \mu_{n-1}(C) = \mu_{n-1}(A), \\ & \mu_{n-1}(C_\varepsilon) \leq \mu_{n-1}(A_\varepsilon) \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0\}\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Dann existiert ein $B \in M(A)$, das den Radius (34) minimiert

$$r(B) = \min\{r(C) \;:\; C \in M(A)\}\,.$$

Beweis Da nach Lemma 6.2 $r(\cdot)$ stetig ist, reicht es aus zu zeigen, daß $M(A)$ bezüglich des Hausdorff-Abstandes abgeschlossen in der Menge $\mathfrak{M}$ ist. Sei $(B^k) \subset M(A)$ eine Folge und $B \in \mathfrak{M}$ mit $\delta(B^k, B) \to 0$. Weiter sei $\varepsilon \geq 0$. Für alle $\eta > 0$ existiert ein hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ mit $B \subset B^k_\eta$ und somit $B_\varepsilon \subset B^k_{\varepsilon+\eta}$. Daraus folgt

$$\mu_{n-1}(B_\varepsilon) \leq \mu_{n-1}(B^k_{\varepsilon+\eta}) \leq \mu_{n-1}(A_{\varepsilon+\eta})$$

(die zweite Ungleicheit gilt wegen (37)) und somit durch Übergang zum Infimum

$$\begin{aligned}\mu_{n-1}(B_\varepsilon) &\leq \inf_{\eta>0} \mu_{n-1}(A_{\varepsilon+\eta}) \leq \mu_{n-1}\left(\bigcap_{\eta>0} A_{\varepsilon+\eta}\right) \\ &= \mu_{n-1}(A_\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich speziell

$$\mu_{n-1}(B) \leq \mu_{n-1}(A)\,,$$

wegen (35) aber auch

$$\mu_{n-1}(B) \geq \mu_{n-1}(A)\,.$$

Damit ist gezeigt, daß $B \in M(A)$ gilt, und $M(A)$ ist abgeschlossen. $\square$

Lemma 6.6. Wir nehmen an, daß Satz 6.1 für die Sphäre S^{n-2} bereits bewiesen ist. Sei $A \subset S^{n-1}$ abgeschlossen und γ ein Halbkreis in S^{n-1} mit den Endpunkten p und $-p$. Dann gilt $\sigma_\gamma(A) \in M(A)$.

Beweis Sei u der Mittelpunkt von γ. Zur Abkürzung setzen wir $S^{n-2,u} = S^{n-2}$. Für alle $y \in \gamma^* = \gamma \setminus \{p, -p\}$ definieren wir die Abbildung $\tau_y : S^{n-2,y} \to S^{n-2,u} = S^{n-2}$ durch Projektion längs der Meridiane. Wegen der Rotations- und Spiegelungsinvarianz des Abstands d existiert eine Funktion $f : \gamma^* \times \gamma^* \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ so daß für alle $y_1, y_2 \in \gamma^*$ und alle $x_1 \in S^{n-2,y_1}, x_2 \in S^{n-2,y_2}$ gilt

$$f\left(y_1, y_2, d\left(\tau_{y_1}(x_1), \tau_{y_2}(x_2)\right)\right) = d(x_1, x_2)\,.$$

Für festgehaltene y_1, y_2 ist die Funktion $f(y_1, y_2, \cdot)$ streng monoton und stetig, somit existiert eine Umkehrfunktion $\eta(y_1, y_2, \cdot)$.

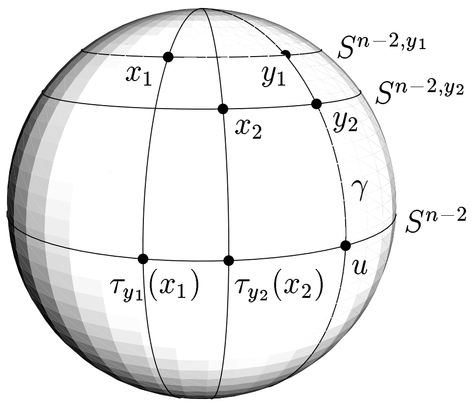

Abbildung 7: Zur Existenz der Funktion f

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $y_1, y_2 \in \gamma^*$ mit $d(y_1, y_2) \le \varepsilon$ und jede Teilmenge $C \subset S^{n-2,y_1}$ gilt dann

$$C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2} = \tau_{y_2}^{-1}\left((\tau_{y_1}(C))_{\eta(y_1,y_2,\varepsilon)}\right)\,. \tag{38}$$

(Ist $d(y_1, y_2) > \varepsilon$, so ist $C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2} = \emptyset$.) Für alle $y \in \gamma^*$ folgt daraus

$$\tau_y((A_\varepsilon)^y) = \bigcup_{\substack{z\in\gamma \\ d(z,y)\le\varepsilon}} (\tau_z(A^z))_{\eta(z,y,\varepsilon)}\,. \tag{39}$$

Sei jetzt $B = \sigma_\gamma(A)$. Die Anwendung von (39) liefert

$$\tau_y((B_\varepsilon)^y) = \bigcup_{\substack{z\in\gamma \\ d(z,y)\le\varepsilon}} (\tau_z(B^z))_{\eta(z,y,\varepsilon)}\,. \tag{40}$$

Die Menge $\tau_z(B^z)$ ist nach Definition eine Kappe in S^{n-2} mit

$$\mu_{n-2}(\tau_z(B^z)) = \mu_{n-2}(\tau_z(A^z)) .$$

Nach Voraussetzung ist der Satz 6.1 in S^{n-2} wahr, es gilt also

$$\mu_{n-2}((\tau_z(B^z))_{\eta(z,y,\varepsilon)}) \leq \mu_{n-2}((\tau_z(A^z))_{\eta(z,y,\varepsilon)}) \tag{41}$$

für alle y, z mit $d(z,y) \leq \varepsilon$. Alle Mengen, die an der Vereinigung in (40) teilnehmen, sind Kappen mit dem gleichen Zentrum u. Aus den Beziehungen (39), (40) und (41) folgt für alle $y \in \gamma \setminus \{p, -p\}$

$$\begin{aligned}
\mu_{n-2}(\tau_y(B_\varepsilon)^y) &\overset{(40)}{=} \sup_{\substack{z\in\gamma \\ d(z,y)\leq\varepsilon}} \mu_{n-2}(\tau_z(B^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}) \\
&\overset{(41)}{\leq} \sup_{\substack{z\in\gamma \\ d(z,y)\leq\varepsilon}} \mu_{n-2}(\tau_z(A^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}) \\
&\overset{(39)}{\leq} \mu_{n-2}(\tau_y(A_\varepsilon)^y) ,
\end{aligned}$$

und daraus mit dem Satz von Fubini

$$\mu_{n-1}(B_\varepsilon) \leq \mu_{n-1}(A_\varepsilon) .$$

Das ist aber genau die Bedingung für $B = \sigma_\gamma(A) \in M(A)$. $\square$

Lemma 6.7. Sei $B \subset S^{n-1}$ abgeschlossen und keine Kugel. Dann gibt es Halbkreise $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ in S^{n-1} so daß gilt

$$r(\sigma_{\gamma_k}(\sigma_{\gamma_{k-1}}(\dots \sigma_{\gamma_1}(B) \dots))) < r(B) .$$

Beweis Sei $r = r(B)$ und $u \in S^{n-1}$ so daß $B \subset B(u,r)$. Wir führen sphärische Symmetrisierungen an Halbkreisen durch, die u als Mittelpunkt besitzen und die $B(u,r)$ unverändert lassen. Zuerst wählen wir einen beliebigen Halbkreis γ_1 mit Mittelpunkt u. Da B keine Kugel ist, ist $\sigma_{\gamma_1}(B)$ nicht ganz $B(u,r)$ und enthält daher nicht den gesamten Rand $\partial B(u,r)$. Wir halten die beiden folgenden Tatsachen fest.

(i) Sei $C \subset B(u,r)$ abgeschlossen und $x \in \partial B(u,r) \setminus C$. Für jeden Halbkreis γ dessen Mittelpunkt u ist, enthält $\sigma_\gamma(C)$ nicht x.

(ii) Sei $G \subset \partial B(u,r)$ relativ offen. Dann gibt es für jedes $x \in \partial B(u,r)$ eine relativ offene Menge $G_x \subset \partial B(u,r)$ mit $x \in G_x$ und einen Halbkreis γ_x mit Mittelpunkt u, so daß für alle abgeschlossen Mengen $C \subset B(u,r)$ mit $G \cap C = \emptyset$ gilt $G_x \cap \sigma_{\gamma_x}(C) = \emptyset$. Sei nämlich $y \in G$ und g die Verbingungstrecke von x und y. Durch eine Drehung kann erreicht werden, daß g parallel zur Geraden $\mathbb{R}e^1$ ist. Als Halbkreis γ_x kann dann z.B. der Halbkreis in der (e^2, e^3)-Ebene mit mit Mittelpunkt u gewählt werden.

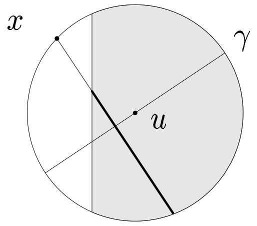

Abbildung 8: Zu Behauptung (i)

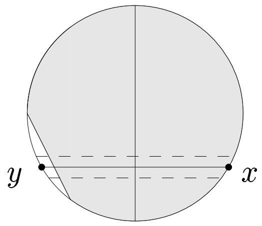

Abbildung 9: Zu Behauptung (ii)

Wir wählen eine offene Teilmenge G von $\partial B(u,r)$, die disjunkt zu $\sigma_{\gamma_1}(B)$ ist. Da $\partial B(u,r)$ kompakt ist, folgt mit (i) und (ii), daß es Halbkreise $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ in S^{n-1} gibt, so daß

$$B' = \sigma_{\gamma_k}(\sigma_{\gamma_{k-1}}(\ldots \sigma_{\gamma_1}(B)\ldots)) \cap \partial B(u,r) = \emptyset$$

gilt. Die Menge B' besitzt somit einen kleineren Radius als $r = r(B)$. □

Beweis von Satz 6.1 Der Beweis von Satz 6.1 erfolgt durch vollständige Induktion über die Dimension n. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Gilt Satz 6.1 für die Sphäre S^{n-2}, kann Lemma 6.6 angewendet werden. Nach Definition der Menge $M(A)$ (s. (37)) folgt aus $B \in M(A)$ und $C \in M(B)$, daß auch $C \in M(A)$ gilt. Aus den Lemmas 6.6 und 6.7 folgt, daß ein Element von $M(A)$ mit minimalem Radius eine Kugel sein muß. Wegen Lemma 6.5 existiert immer ein solches Element, d.h. $M(A)$ enthält immer eine Kugel. Das ist genau die Behauptung von Satz 6.1. □

Folgerung 6.8. Sei $A \subset S^{n+1}$ abgeschlossen und $\mu_{n+1}(A) \geq 1/2$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu_{n+1}(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right) . \tag{42}$$

(Man beachte die Dimension $n+1$!)

Beweis ([MiSch-1986], Corollary 2.2) Wegen Satz 6.1 ist es ausreichend, das Maß einer vergrößerten Halbkugel $B(u,\pi/2)_\varepsilon = B(u,\pi/2+\varepsilon)$ nach unten abzuschätzen. Dies geschieht mit Hilfe der Beziehung (32). Wir bezeichnen zur

Abkürzung $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta$. Wir substituieren $\theta = \tau/\sqrt{n}$ und nutzen die Tatsache, daß $\cos t \le \exp(-t^2/2)$ für $0 \le t \le \pi/2$ gilt. Es ergibt sich

$$1 - \mu_{n+1}\left(B(u, \pi/2 + \varepsilon)\right) = \frac{1}{2I_n} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{1}{2I_n\sqrt{n}} \int\limits_{\sqrt{n}\varepsilon}^{\sqrt{n}\pi/2} \cos^n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) d\tau$$

$$\le \frac{1}{2I_n\sqrt{n}} \int\limits_{\sqrt{n}\varepsilon}^{\sqrt{n}\pi/2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \le \frac{\exp(-\varepsilon^2 n/2)}{2I_n\sqrt{n}} \int\limits_{0}^{\sqrt{n}(\pi/2-\varepsilon)} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$\le \frac{\exp(-\varepsilon^2 n/2)}{2I_n\sqrt{n}} \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\exp(-\varepsilon^2 n/2)\sqrt{\pi/2}}{2I_n\sqrt{n}} .$$

Mittels partieller Integration erhalten wir $kI_k = (k-1)I_{k-2}$ und daraus $\sqrt{k}I_k \ge \sqrt{k-2}I_{k-2}$. Wir können somit I_n nach unten abschätzen durch

$$\sqrt{n}I_n \ge \min\{I_1, \sqrt{2}I_2\} = \min\{1, \sqrt{2}\pi/4\} = 1 .$$

Fassen wir diese beiden Resultate zusammen, so erhalten wir schließlich (42). □

In [Mi-1996] wird für einen metrischen Maßraum (X, d, μ) die α-Konzentrationsfunktion definiert

$$\alpha(X, \varepsilon) = \sup\{\mu(X \setminus A_\varepsilon) \,:\, A \in \mathcal{B}(X), \quad \mu(A) \ge 1/2\} .$$

Aus (42) folgt für die α-Konzentrationsfunktion die Abschätzung

$$\alpha(S^{n+1}, \varepsilon) \le \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right) .$$

Für verschiedene andere Familien (X_n, d_n, μ_n) gibt es Abschätzungen der Form

$$\alpha(X_n, \varepsilon) \le c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n) ,$$

ohne daß die Lösungen des isoperimetrischen Problems bekannt sind. Ein Beispiel sind die Tori $\mathbb{T}^n$ mit dem Haarschen Maß und dem geodätischen Abstand [Mi-1996].

Sei jetzt $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es existiert eine Zahl M_f, für die gilt

$$\mu_{n+1}\{x \,:\, f(x) \le M_f\} \ge \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mu_{n+1}\{x \,:\, f(x) \ge M_f\} \ge \frac{1}{2} .$$

M_f heißt der *Median* von f.

Satz 6.9 (Lévy). Sei $A^f = f^{-1}(M_f)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\mu_{n+1}((A^f)_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right) .$$

Beweis Seien $A^f_+ = \{x \ : \ f(x) \geq M_f\}$ und $A^f_- = \{x \ : \ f(x) \leq M_f\}$. Dann gilt $\mu_{n+1}(A^f_+) \geq \frac{1}{2}$ und $\mu_{n+1}(A^f_-) \geq \frac{1}{2}$ sowie

$$(A^f)_\varepsilon = (A^f_+)_\varepsilon \cap (A^f_-)_\varepsilon . \tag{43}$$

Gilt nämlich $x \in (A^f)_\varepsilon$, so gibt es ein $y \in A^f$ mit $d(x,y) \leq \varepsilon$. Wegen $y \in A^f_+$ und $y \in A^f_-$ gilt dann auch $x \in (A^f_+)_\varepsilon \cap (A^f_-)_\varepsilon$. Sei umgekehrt $x \in (A^f_+)_\varepsilon \cap (A^f_-)_\varepsilon$ und ohne Einschränkung $f(x) > M_f$. Dann gibt es ein $y \in A^f_-$ mit $d(x,y) \leq \varepsilon$. Da f stetig ist, existiert auf dem Großkreisbogen durch x und y ein $\hat{y}$ mit $f(\hat{y}) = M_f$ und $d(x,\hat{y}) \leq \varepsilon$, d.h. es gilt (43). Auf diese Menge wird nun Folgerung 6.8 angewendet. Nach den de Morganschen Regeln gilt

$$(A^f_+)_\varepsilon \cap (A^f_-)_\varepsilon = S^{n+1} \setminus \left(S^{n+1} \setminus (A^f_+)_\varepsilon \cup S^{n+1} \setminus (A^f_-)_\varepsilon\right) ,$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}((A^f_+)_\varepsilon \cap (A^f_-)_\varepsilon) &= 1 - \mu_{n+1}(S^{n-1} \setminus (A^f_+)_\varepsilon \cup S^{n-1} \setminus (A^f_-)_\varepsilon) \\
&= 1 - \left(\mu_{n+1}(S^{n-1} \setminus (A^f_+)_\varepsilon) + \mu_{n+1}(S^{n-1} \setminus (A^f_-)_\varepsilon)\right) \\
&\geq 1 - 2\sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right) .
\end{aligned}$$

□

Besonders interessant wird die Aussage von Satz 6.9 für Lipschitz-stetige Funktionen. Sei $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Dann gibt es zu jedem $y \in (A^f)_\varepsilon$ ein $x \in A^f$, für das gilt

$$|f(y) - M_f| = |f(y) - f(x)| \leq L d(x,y) \leq L\varepsilon .$$

Daraus folgt

$$\mu_{n+1}\{y \ : \ |f(y) - M_f| \leq \varepsilon) \geq \mu\left((A^f)_{\frac{\varepsilon}{L}}\right) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}\right) . \tag{44}$$

Man kann sagen, daß eine Lipschitz-stetige Funktion auf einer Sphäre hoher Dimension praktisch konstant (und zwar gleich ihrem Median) ist. Die Bedeutung der Abschätzung (44) wurde zuerst um 1970 von Vitali Milman erkannt, als er mit ihrer Hilfe den bereits zitierten Satz von Dvoretzky (Satz 1.2) verbessern konnte. In der Arbeit [ABP-1998] wird mit Hilfe von (44) eine Version der zentralen Grenzwerteigenschaft für symmetrische konvexe Körper gezeigt, die eine ε-Konzentrations-Hypothese ähnlich zur Eigenschaft (ii) in Satz 4.1 erfüllen. Einige Einzelheiten werden wir in Abschnitt 8 angeben.

7 Ein Variationsproblem für signierte Maße

Im folgenden sei die Einheitssphäre S^{n-1} des $\mathbb{R}^n$ mit dem geodätischen Abstand d versehen. Ein Borel-Maß $\mu : \mathcal{B}(S^{n-1}) \to [0,\infty]$ heißt *regulär*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} \mu(C) &< \infty \quad \text{für alle kompakten Mengen } C\,; \\ \mu(A) &= \sup\{\mu(C) \,:\, C \subset A \text{ kompakt}\} \\ &= \inf\{\mu(O) \,:\, A \subset O \text{ offen}\}\,. \end{aligned}$$

Für ein signiertes Borel-Maß μ ist die Variation durch

$$|\mu|(A) = \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{E \in \mathcal{Z}} |\mu(E)|$$

definiert, dabei wird das Supremum über alle endlichen disjunkten Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von A genommen. Ein signiertes Maß μ heißt *regulär*, wenn die Variation $|\mu|$ regulär ist. Die Menge aller regulären signierten Borel-Maße auf S^{n-1} bezeichnen wir mit $M_{reg}(S^{n-1})$. Versehen mit der Variationsnorm

$$\|\mu\| = |\mu|(S^{n-1})$$

wird $M_{reg}(S^{n-1})$ zu einem Banachraum. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist dieser isometrisch isomorph zum Dualraum $C(S^{n-1})'$ der stetigen Funktionen auf S^{n-1} (s. [We-1995], Theorem II.2.5). Durch die Halbnormen

$$p_f(\mu) = \left| \int\limits_{S^{n-1}} f\, d\mu \right| , \quad f \in C(S^{n-1})$$

wird die schwach*-Topologie $\sigma(M_{reg}(S^{n-1}), C(S^{n-1}))$ definiert. Die Menge $Prob(S^{n-1})$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist konvex und schwach*-kompakt (s. [We-1995], S. 345). Die Extremalpunkte von $Prob(S^{n-1})$ sind gerade die Dirac-Maße

$$\operatorname{ext}(Prob(S^{n-1})) = \{\delta_u \,:\, u \in S^{n-1}\}\,.$$

Nach dem Satz von Krein-Milman (s. [We-1995], Theorem VIII.4.4) liegen die diskreten Maße, d.h. Konvexkombinationen von Dirac-Maßen dicht in $Prob(S^{n-1})$ (bezüglich der schwach*-Topologie)

$$Prob(S^{n-1}) = \mathrm{cl}^* \operatorname{conv}\{\delta_u \,:\, u \in S^{n-1}\}\,.$$

Ein signiertes Maß $\mu \in M_{reg}(S^{n-1})$ heißt *normiert*, wenn $\mu \geq 0$ und $\mu(S^{n-1}) = 1$ gilt, und sein Schwerpunkt 0 ist, d.h.

$$\int\limits_{S^{n-1}} x_i\, d\mu(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{45}$$

Ein signiertes Maß $\mu \in M_{reg}(S^{n-1})$ heißt *isotrop*, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß gilt

$$\int\limits_{S^{n-1}} x_i x_k \, d\mu(x) = c\delta_{ik} \,, \quad \text{für alle} \quad i,k = 1,\ldots,n \,, \tag{46}$$

dabei bezeichne δ_{ik} das Kronecker-Symbol. Für Wahrscheinlichkeitsmaße folgt sofort $c = 1/n$. Im folgenden bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge der normierten isotropen Maße auf S^{n-1}. $\mathcal{M}$ ist konvex und bezüglich der schwach*-Topologie kompakt. Um die schwach*-Kompaktheit zu zeigen, reicht es aus, die schwach*-Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ in $Prob(S^{n-1})$ zu zeigen. Betrachten wir die stetigen linearen Abbildungen

$$\left(\mu \mapsto \int\limits_{S^{n-1}} x_i \, d\mu(x) \right) \; : M_{reg}(S^{n-1}) \to \mathbb{R} \,,$$

dann sind die Maße mit Schwerpunkt 0 gerade das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$. Analog wird mit der Isotropiebedingung verfahren. Für ein $\mu \in M_{reg}(S^{n-1})$ definieren wir die Abweichung vom Standardmaß μ_{n-1} wie folgt

$$F(\mu) = \int\limits_{S^{n-1}} \left(\mu\left(B(u,\pi/2)\right) - \frac{1}{2} \right)^2 d\mu_{n-1}(u) \tag{47}$$

($B(u,\pi/2)$ ist gerade eine Halbsphäre). Wir betrachten als Modellproblem die Extremalaufgabe

$$F(\mu) \to \max! \quad \text{bei} \quad \mu \in \mathcal{M} \,. \tag{48}$$

Zunächst schränken wir uns aber auf diskrete Maße ein. Sei ein $m \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben und seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{R}$, sowie $u^1,\ldots,u^m \in S^{n-1}$ paarweise verschieden und

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{u^j} \,. \tag{49}$$

Wir identifizieren μ mit dem Punkt

$$\mu = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m, u_1^1,\ldots,u_n^1,\ldots,u_1^m,\ldots,u_n^m) \in \mathbb{R}^{m+mn} \,.$$

Die Bedingungen dafür, daß ein solcher Punkt ein diskretes Maß aus $\mathcal{M}$ repräsentiert, lauten

$$\begin{aligned}
\alpha_j &> 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m\,, & (50)\\
\sum_{j=1}^m \alpha_j - 1 &= 0\,, & (51)\\
\sum_{i=1}^n (u_i^j)^2 - 1 &= 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m\,, & (52)\\
\sum_{j=1}^m \alpha_j u_i^j &= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,, & (53)\\
\sum_{j=1}^m \alpha_j u_i^j u_k^j - \frac{1}{n}\delta_{ik} &= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n, k = i, \ldots, n\,. & (54)
\end{aligned}$$

Aus (52) und (54) folgt (51), diese Gleichung kann daher eingespart werden. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{disk}^m$ die Menge $T^{-1}(0)$, wobei T für die linke Seite der Bedingungen (52) – (54) steht, vermindert um die singulären Punkte, d.h. die Punkte in denen die Jacobi-Matrix JT keinen Höchstrang besitzt. $\mathcal{M}_{disk}^m$ ist somit eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir wollen jetzt Bedingungen dafür angeben, daß eine Richtung $\nu = (\beta_1, \ldots, \beta_m, v_1^1, \ldots, v_n^1, \ldots, v_1^m, \ldots, v_n^m)$ tangential an $\mathcal{M}_{disk}^m$ ist. Damit die Gesamtmasse 1 erhalten bleibt, muß gelten

$$\sum_{j=1}^m (\alpha_j + \varepsilon\beta_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j + \varepsilon \sum_{j=1}^m \beta_j = 1\,,$$

daraus folgt

$$\sum_{j=1}^m \beta_j = 0\,.$$

Damit die Schwerpunkts- und Isotropiebedingungen (53) und (54) erhalten bleiben, folgt analog

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \alpha_j v_i^j + \sum_{j=1}^m \beta_j u_i^j &= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,,\\
\sum_{j=1}^m (\alpha_j u_i^j v_k^j + \alpha_j u_k^j v_i^j + \beta_j u_i^j u_k^j) &= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n,\ k = i, \ldots, n\,.
\end{aligned}$$

Weiterhin müssen die „Geschwindigkeitsvektoren“ v^j tangential an die Sphäre S^{n-1} sein, d.h. es muß gelten

$$(u^j | v^j) = \sum_{i=1}^n u_i^j v_i^j = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Die obigen Bedingungen ergeben sich durch Anwendung der Jacobi-Matrix der Abbildung T auf einen Vektor ν. Das Zielfunktional (47) nimmt für diskrete Maße folgende Gestalt an (die Mengen $\{u \in S^{n-1} : (u^j|u) = 0\}$ sind μ_{n-1}-Nullmengen)

$$
\begin{aligned}
F(\mu) &= \int\limits_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \begin{array}{ll} 1 : \text{falls} & (u^j|u) > 0 \\ 0 : \text{sonst} & \end{array} \right\} - \frac{1}{2} \right)^2 d\mu_{n-1}(u) \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{sgn}(u^j|u) \right)^2 d\mu_{n-1}(u) \,.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ist auch außerhalb von $\mathcal{M}^m_{disk}$ definiert. Wir können deshalb für eine tangentiale Richtung ν die rechtsseitige Variation von F folgendermaßen definieren

$$
\delta_+ F(\mu, \nu) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{F(\mu + \varepsilon\nu) - F(\mu)}{\varepsilon} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \left[F\left(\sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \varepsilon\beta_j) \delta_{u^j + \varepsilon v^j} \right) - F\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{u^j} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S^{n-1}} \left[\left(\sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \varepsilon\beta_j) \operatorname{sgn}(u^j + \varepsilon v^j|u) \right)^2 \right. \\
&\qquad \left. - \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{sgn}(u^j|u) \right)^2 \right] d\mu_{n-1}(u) \\
&= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{m} [(\alpha_j + \varepsilon\beta_j) \operatorname{sgn}(u^j + \varepsilon v^j|u) + \alpha_j \operatorname{sgn}(u^j|u)] \right. \\
&\qquad \left. \cdot \sum_{j=1}^{m} [(\alpha_j + \varepsilon\beta_j) \operatorname{sgn}(u^j + \varepsilon v^j|u) - \alpha_j \operatorname{sgn}(u^j|u)] \right) d\mu_{n-1}(u) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} a_{jk} \,.
\end{aligned}
$$

Die Anteile a_{jk} vereinfachen wir weiter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} a_{jk} &= \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S^{n-1}} [(\alpha_j + \varepsilon\beta_j) \operatorname{sgn}(u^j + \varepsilon v^j|u) + \alpha_j \operatorname{sgn}(u^j|u)] \\
&\qquad \cdot [(\alpha_k + \varepsilon\beta_k) \operatorname{sgn}(u^k + \varepsilon v^k|u) - \alpha_k \operatorname{sgn}(u^k|u)] \, d\mu_{n-1}(u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S^{n-1}} \left[\alpha_j \left(\operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u)+\operatorname{sgn}(u^j|u)\right)+\varepsilon\beta_j \operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u)\right] \\
&\qquad \cdot \left[\alpha_k \left(\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)-\operatorname{sgn}(u^k|u)\right)+\varepsilon\beta_k \operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)\right] d\mu_{n-1}(u) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S^{n-1}} \Big\{\alpha_j\alpha_k[\operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u)+\operatorname{sgn}(u^j|u)][\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)-\operatorname{sgn}(u^k|u)] \\
&\qquad +\varepsilon\alpha_j\beta_k\,[\operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u)+\operatorname{sgn}(u^j|u)]\,\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u) \\
&\qquad +\varepsilon\beta_j\alpha_k\,[\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)-\operatorname{sgn}(u^k|u)]\,\operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u) \\
&\qquad +\varepsilon^2\beta_j\beta_k\,\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)\,\operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u)\Big\}\, d\mu_{n-1}(u)\,. \qquad (56)
\end{aligned}
$$

Der Beitrag der letzten Zeile konvergiert für $\varepsilon \to 0+$ offensichtlich gegen 0. Ebenso kann die vorletzte Zeile vernachlässigt werden, da das Maß der Menge, auf der $\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)$ und $\operatorname{sgn}(u^k|u)$ verschieden sind gegen 0 konvergiert. Zur Behandlung der beiden ersten Zeilen führen wir für ein festgehaltenes $\varepsilon > 0$ folgende Bezeichnungen ein

$$
\begin{aligned}
A_j^{++} &= \{u \in S^{n-1} \,:\, (u^j|u) \geq 0,\, (u^j+\varepsilon v^j|u) \geq 0\}\,, \\
A_j^{--} &= \{u \in S^{n-1} \,:\, (u^j|u) \leq 0,\, (u^j+\varepsilon v^j|u) \leq 0\}\,, \\
A_j^{-+} &= \{u \in S^{n-1} \,:\, (u^j|u) \leq 0,\, (u^j+\varepsilon v^j|u) \geq 0\}\,, \\
A_j^{+-} &= \{u \in S^{n-1} \,:\, (u^j|u) \geq 0,\, (u^j+\varepsilon v^j|u) \leq 0\}\,,
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
A_j^{+} &= \{u \in S^{n-1} \,:\, (u^j|u) \geq 0\}\,, \\
A_j^{-} &= \{u \in S^{n-1} \,:\, (u^j|u) \leq 0\}\,.
\end{aligned}
$$

Für die zweite Zeile des letzten Integrals in (56) gilt wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{S^{n-1}} \alpha_j\beta_k\,[\operatorname{sgn}(u^j+\varepsilon v^j|u)+\operatorname{sgn}(u^j|u)]\,\operatorname{sgn}(u^k+\varepsilon v^k|u)\, d\mu_{n-1}(u) \\
&= 2\alpha_j\beta_k \int\limits_{S^{n-1}} \operatorname{sgn}(u^j|u)\operatorname{sgn}(u^k|u)\, d\mu_{n-1}(u) \\
&= 2\alpha_j\beta_k\,[\mu_{n-1}(A_j^+\cap A_k^+)+\mu_{n-1}(A_j^-\cap A_k^-) \\
&\qquad -\mu_{n-1}(A_j^+\cap A_k^-)-\mu_{n-1}(A_j^-\cap A_k^+)] \\
&= 4\alpha_j\beta_k\,[\mu_{n-1}(A_j^+\cap A_k^+)-\mu_{n-1}(A_j^+\cap A_k^-)]\,.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde benutzt, daß aus Symmetriegründen gilt

$$
\begin{aligned}
\mu_{n-1}(A_j^-\cap A_k^-) &= \mu_{n-1}(A_j^+\cap A_k^+)\,, \\
\mu_{n-1}(A_j^-\cap A_k^+) &= \mu_{n-1}(A_j^+\cap A_k^-)
\end{aligned}
$$

(die Berechnung von $\mu_{n-1}(A_j^- \cap A_k^-)$ usw. erfolgt weiter unten). Für die erste Zeile des letzten Integrals in (56) gilt

$$\begin{aligned}
&\alpha_j\alpha_k \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S^{n-1}} [\mathrm{sgn}(u^j + \varepsilon v^j|u) + \mathrm{sgn}(u^j|u)] \\
&\qquad\qquad \cdot [\mathrm{sgn}(u^k + \varepsilon v^k|u) - \mathrm{sgn}(u^k|u)]\, d\mu_{n-1}(u) \\
= \;& \alpha_j\alpha_k \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon} [4(\mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{-+}) + \mu_{n-1}(A_j^{--} \cap A_k^{+-}) \\
&\qquad\qquad -4(\mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{+-}) + \mu_{n-1}(A_j^{--} \cap A_k^{-+})] \\
= \;& 8\alpha_j\alpha_k \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon} [\mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{-+}) - \mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{+-})]\,,
\end{aligned}$$

dabei werden ebenfalls die Symmmetrien

$$\begin{aligned}
\mu_{n-1}(A_j^{--} \cap A_k^{+-}) &= \mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{-+})\,, \\
\mu_{n-1}(A_j^{--} \cap A_k^{-+}) &= \mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{+-})
\end{aligned}$$

ausgenutzt. Für das Maß des sphärischen Zweiseits $A_j^+ \cap A_k^-$ gilt

$$\mu_{n-1}(A_j^+ \cap A_k^-) = \frac{\arccos(u^j|u^k)}{2\pi}\,, \tag{57}$$

da der Anteil von $A_j^+ \cap A_k^-$ an der gesamten Sphäre dem Winkel zwischen den Vektoren u^j und u^k entspricht. Da sich $A_j^+ \cap A_k^+$ und $A_j^+ \cap A_k^-$ zur Halbsphäre A_j^+ ergänzen, gilt

$$\mu_{n-1}(A_j^+ \cap A_k^+) = \frac{\pi - \arccos(u^j|u^k)}{2\pi}\,.$$

Als nächstes betrachten wir sphärische Dreiseite vom Typ $A_j^{pp} \cap A_k^{q,-q}$, $p, q \in \{+,-\}$. Im Fall $j = k$ ist das Maß einer solchen Menge gleich 0. Wir setzen zunächst voraus, daß $n \geq 3$ gilt, den Fall $n = 2$ behandeln wir separat. Für das Maß eines sphärischen Dreiseits auf der Sphäre S^{n-1} existiert folgende Formel.

Lemma 7.1. Seien u^1, u^2 und u^3 linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$ und $H^j = (u^j)^\perp$, $(j = 1, 2, 3)$ die zugehörigen Orthogonalräume. Weiter bezeichne $T = H_+^1 \cap H_+^2 \cap H_+^3 \cap S^{n-1}$ die durch die positiven Halbräume bestimmte Menge. Bezeichnen α, β und γ die Innenwinkel von T, so gilt

$$\mu_{n-1}(T) = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{4\pi}\,. \tag{58}$$

Beweis Der Beweis erfolgt völlig analog zum Fall $S^2 \subset R^3$, s. [Be-1987], 18.3.8.4. Wir zerlegen die Halbsphäre $D = H_+^2 \cap S^{n-1}$ in vier Teile, deren Durchschnitte

μ_{n-1}-Nullmengen sind. Seien A, B und C so, daß

$$\begin{aligned} A \cup (-T) &= H_-^1 \cap H_-^3 \cap S^{n-1} \\ B \cup T &= H_+^2 \cap H_+^3 \cap S^{n-1} \\ C \cup T &= H_+^1 \cap H_+^2 \cap S^{n-1} . \end{aligned}$$

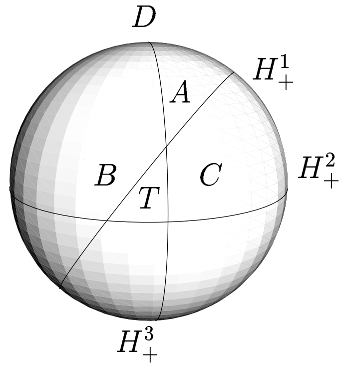

Abbildung 10: Zur Zerlegung der Menge D

Für das Maß von D ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \mu_{n-1}(T) + \mu_{n-1}(A) + \mu_{n-1}(B) + \mu_{n-1}(C) \\ &= \mu_{n-1}(T) + \frac{\alpha}{2\pi} - \mu_{n-1}(T) + \frac{\beta}{2\pi} - \mu_{n-1}(T) + \frac{\gamma}{2\pi} - \mu_{n-1}(T) \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\pi} - 2\mu_{n-1}(T) . \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach $\mu_{n-1}(T)$ erhalten wir (58). $\square$

Wir wenden (58) auf die Menge $A_j^{++} \cap A_k^{-+} = (u^j)_+^\perp \cap (u^k)_-^\perp \cap (u^k + \varepsilon v^k)_+^\perp$ an. Wir setzen voraus, daß für alle Indizes j und k gilt $u^j \neq \pm u^k$, dann ist stets $(u^j|u^k)^2 \neq 1$. Für die Winkel ergibt sich mit Bezeichnungen wie in Abbildung 11

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle\big((u^k)_-^\perp, (u^j)_+^\perp\big) = \arccos\,(u^k|u^j) , \\ \beta &= \angle\big((u^k + \varepsilon v^k)_+^\perp, (u^j)_+^\perp\big) = \pi - \arccos\,(u^k + \varepsilon v^k|u^j) \\ &= \pi - \arccos\,\big((u^k|u^j) + \varepsilon(v^k|u^j)\big) \\ &= \pi - \arccos\,(u^k|u^j) + \frac{\varepsilon(v^k|u^j)}{\sqrt{1 - (u^k|u^j)^2}} + O(\varepsilon^2) , \\ \gamma &= \angle\big((u^k)_-^\perp, (u^k + \varepsilon v^k)_+^\perp\big) = \varepsilon|v^k| + O(\varepsilon^2) . \end{aligned}$$

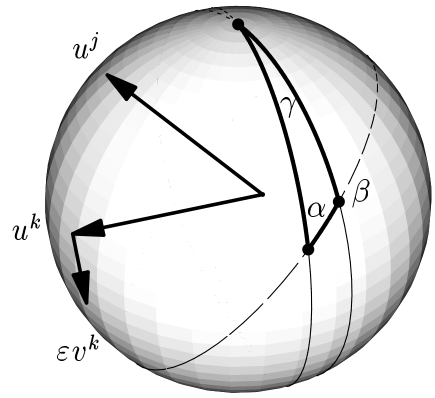

Abbildung 11: Winkel im sphärischen Dreiseit

Für das Maß erhalten wir mit (58)

$$\begin{aligned}\mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{-+}) &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{(v^k|u^j)}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}} + |v^k| + O(\varepsilon^2)\right) , \\ \mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{+-}) &= \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(-\frac{(v^k|u^j)}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}} + |v^k| + O(\varepsilon^2)\right) .\end{aligned}$$

Die Herleitung im Fall $n = 2$ unterscheidet sich nur in einem Detail. Mengen vom Typ $A_j^+ \cap A_k^-$ sind Kreisbögen, für sie gilt ebenfalls (57). Anders verhalten sich Mengen vom Typ $A_j^{++} \cap A_k^{-+}$, für sie gilt

$$\begin{aligned}&\mu_1(A_j^{++} \cap A_k^{-+}) - \mu(A_j^{++} \cap A_k^{+-}) \\ =\ & \frac{1}{2\pi}\left(\left\{\begin{array}{rl} \varepsilon|v^k| : \text{falls} & (v^k|u^j) > 0 \\ -\varepsilon|v^k| : \text{falls} & (v^k|u^j) < 0 \end{array}\right\} + O(\varepsilon^2)\right) \\ =\ & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\varepsilon\,|v^k|\,(v^k|u^j)}{|(v^k|u^j)|} + O(\varepsilon^2)\right)\end{aligned}$$

Ist $(v^k|u^j) > 0$, so ergänzen sich die Winkel $\psi = \angle(v^k, u^j)$ und $\varphi = \angle(u^k, u^j)$ zu $\pi/2$ und es gilt

$$\cos\psi = \frac{(v^k|u^j)}{|v^k|} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-(u^k|u^j)^2} .$$

Im Fall $(v^k|u^j) < 0$ gilt für die Differenz $\psi - \varphi = \angle(v^k, u^j) - \angle(u^k, u^j) = \pi/2$ und es gilt

$$\cos(\pi - \psi) = -\frac{(v^k|u^j)}{|v^k|} = \frac{|(v^k|u^j)|}{|v^k|} = \sin\varphi = \sqrt{1-(u^k|u^j)^2}\,.$$

In beiden Fällen gilt also

$$\frac{|v^k|}{|(v^k|u^j)|} = \frac{1}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}}\,.$$

Fassen wir also alle Beiträge zu (56) zusammen, so ergibt sich für den Grenzwert

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\, a_{jk} \;= \\
= \;& 4\alpha_j\beta_k \left[\mu_{n-1}(A_j^+ \cap A_k^+) - \mu_{n-1}(A_j^+ \cap A_k^-)\right] \\
& +8\alpha_j\alpha_k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{-+}) - \mu_{n-1}(A_j^{++} \cap A_k^{+-})\right] \\
= \;& 4\alpha_j\beta_k \left[\frac{\pi - \arccos(u^j|u^k)}{2\pi} - \frac{\arccos(u^j|u^k)}{2\pi}\right] \\
& +\frac{8\alpha_j\alpha_k}{4\pi}\left[\left(\frac{(v^k|u^j)}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}} + |v^k|\right) - \left(-\frac{(v^k|u^j)}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}} + |v^k|\right)\right] \\
= \;& 4\alpha_j \left[\beta_k \frac{\pi - 2\arccos(u^j|u^k)}{2\pi} + \frac{\alpha_k}{\pi}\frac{(v^k|u^j)}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}}\right]\,.
\end{aligned}$$

Schließlich summieren wir alle Terme auf und erhalten für (55)

$$\begin{aligned}
\delta_+ F(\mu,\nu) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{F(\mu+\varepsilon\nu) - F(\mu)}{\varepsilon} \qquad (59)\\
= \;& \frac{1}{4}\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\, a_{jk} \\
= \;& \frac{1}{4}\sum_{j=1}^m \left[2\alpha_j\beta_j + 4\alpha_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^m \left(\beta_k \frac{\pi - 2\arccos(u^j|u^k)}{2\pi} + \frac{\alpha_k}{\pi}\frac{(v^k|u^j)}{\sqrt{1-(u^k|u^j)^2}}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt nur für den Fall, daß $u^j \neq \pm u^k$ für alle j und k gilt. Ist das der Fall, so kann ν in (59) durch $-\nu$ ersetzt werden, und es gilt $-\delta_+F(\mu,\nu) = \delta_+F(\mu,-\nu) = \delta_-F(\mu,\nu)$, F ist also im Punkt μ differenzierbar.

Im Fall, daß ein $u^j = -u^k$ ist, kann es sein, daß $\delta_+F(\mu,\nu) \neq \delta_-F(\mu,\nu) = \delta_+F(\mu,-\nu)$ gilt, d.h. das Funktional F ist nicht differenzierbar. Wir betrachten als Beispiel das Maß $\mu_\Box \in M_{reg}(S^1)$, das folgendermaßen definiert ist

$$\mu_\Box = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} \delta_{u^j} = \frac{1}{4}\left(\delta_{e^1} + \delta_{-e^1} + \delta_{e^2} + \delta_{-e^2}\right) \ .$$

Die Variation erfolgt in Richtung der Vektoren

$$v^1 = v^2 = 0,\ v^3 = v^4 = e^1 \ .$$

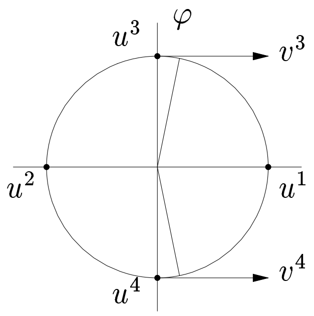

Abbildung 12: Zum Beispiel einer nicht-differenzierbaren Stelle

Wir wählen hier den Winkel φ als Parameter und bezeichnen das um φ gestörte Maß mit μ_φ. Aus den Schwerpunkts- und Isotropiebedingungen folgen für die Gewichte in Abhängigkeit von φ

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \alpha_4 = \frac{1}{4\cos^2\varphi} \ , \\
\alpha_1 &= \frac{1}{4} - \frac{\tan\varphi}{4\cos\varphi} - \frac{1}{4}\tan^2\varphi \ , \\
\alpha_2 &= \frac{1}{4} + \frac{\tan\varphi}{4\cos\varphi} - \frac{1}{4}\tan^2\varphi \ .
\end{aligned}$$

Der Wert des Funktionals F an der Stelle μ_φ ist

$$\begin{aligned}
F(\mu_\varphi) &= \frac{1}{\pi}\Bigg[\varphi\left(\alpha_1 + 2\alpha_3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(\alpha_1 + \alpha_3 - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(\alpha_2 + \alpha_3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \varphi\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\right)^2\Bigg] \\
&= \cdots = \frac{1}{16\pi}\left(2\varphi\frac{1 - 2\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \pi\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right) \ .
\end{aligned}$$

Die rechtsseitige Ableitung des Funktionals F beträgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}F(\mu_\varphi) &= 2\frac{1-2\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + 2\varphi\frac{-2\cos^2\varphi + 4\sin\varphi(1-2\sin\varphi)}{\cos^5\varphi} \\ &\quad + 2\pi\sin\varphi\frac{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi}{\cos^5\varphi}\,,\end{aligned}$$

der Wert an der Stelle $\varphi = 0$ ist $\frac{1}{8\pi}$. Werden die Vektoren v^j durch $-v^j$ ersetzt, so ergibt sich aus Symmetriegründen der gleiche Wert. Dies zeigt, daß an der Stelle $\varphi = 0$ die rechts- und linksseitigen Ableitungen des Funktionals F nicht übereinstimmen.

Die Vermutung ist, daß die Extremalaufgabe (48) durch das Simplex-Maß gelöst wird, d.h. das diskrete Maß, das in den Ecken eines regulären Simplex konzentriert ist. Diese Maß ist durch die Bedingungen (50)-(54) bis auf eine Isometrie eindeutig festgelegt.

Lemma 7.2. Sei $\mu = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\alpha_j\delta_{u^j} \in \mathcal{M}_{disk}^{n+1}$ ein diskretes Maß auf S^{n-1}, das den Bedingungen (50)-(54) genügt und seien $v^1,\ldots,v^{n+1}$ die Ecken eines regulären Simplex auf S^{n-1}. Dann gibt es eine Isometrie $T : S^{n-1} \to S^{n-1}$ mit $T(u^j) = v^j$ und es gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Beweis Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über die Dimension n. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Wir nehmen an, Lemma 7.2 sei für die Dimension $n-1$ gezeigt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $u^{n+1} = -e^n = (0,\ldots,0,-1)^T$ gilt. Die Bedingung (53) liefert

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_k^j = 0 \quad \text{für} \quad k = 1,\ldots,n-1\,, \tag{60}$$

die Bedingung (54) hingegen

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_k^j u_n^j = 0 \quad \text{für} \quad k = 1,\ldots,n-1\,. \tag{61}$$

Die Gleichungssysteme (60) und (61) können in Matrix-Form geschrieben werden.

$$\begin{aligned} A\mathbf{e} &= 0\,, \\ A\mathbf{u} &= 0\,, \end{aligned}$$

dabei ist zur Abkürzung gesetzt worden

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (1,\ldots,1)^T\,, \\ \mathbf{u} &= (u_n^1,\ldots,u_n^n)^T\,, \\ A &= \left(\alpha_j u_k^j\right)_{j=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n-1}\,. \end{aligned}$$

Der Rang der Matrix A ist $n-1$. Nehmen wir an, es wäre nicht so, dann würden die Spalten von A einen höchstens $(n-2)$-dimensionalen Teilraum von $(e^n)^\perp$ aufspannen. In diesem Fall würden aber auch alle u^j, $j=1,\dots,n+1$ nur einen höchstens $(n-1)$-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^n$ erzeugen, was ein Widerspruch zur geforderten Isotropie ist. Daher gilt $dim\ null(A)=1$ und somit $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{e}$ für ein $\lambda\in\mathbb{R}$. Anders ausgedrückt, besitzen die $u^1,u^2,\dots,u^n$ die gleiche n-te Koordinate, liegen demnach in einer Hyperebene orthogonal zu e^n. Auf diese n Punkte auf einer $(n-1)$-dimensionalen Sphäre kann jetzt (nach einer geeigneten Streckung) die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. Die Punkte $u^1,u^2,\dots,u^n$ bilden ein $(n-1)$-dimensionales Simplex, und die Gewichte $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ sind gleich. Da durch eine Drehung jedes andere u^j ebenfalls auf $-e^n$ abgebildet werden kann und das obige Argument in völlig analoger Weise wiederholt werden kann, bilden die $u^1,u^2,\dots,u^{n+1}$ die Ecken eines regulären Simplex auf S^{n-1} und es gilt $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. □

Wir betrachten noch einmal für ein gegebenes $m\in\mathbb{N}$ die Aufgabe

$$F(\mu)\to \max! \quad \text{bei} \quad \mu\in\mathcal{M}^m_{disk}\ .$$

Es bliebe zu zeigen, daß im Fall $m>n+1$ zu jedem $\mu\in\mathcal{M}^m_{disk}$ eine tangentiale Richtung ν existiert, so daß gilt

$$\delta_+F(\mu,\nu)>0\ .$$

Ist das der Fall, so besitzt das Zielfunktional F auf $\mathcal{M}^m_{disk}$ kein lokales Maximum. Da F stetig ist, muß F auf der Abschließung $\overline{\mathcal{M}}^m_{disk}$ sein Maximum annehmen, d.h. Maxima müssen Randpunkte von $\mathcal{M}^m_{disk}$ sein. Solche Randpunkte sind enweder Singularitäten, oder Stellen, an denen möglichst viele der α_j gleich 0 sind. Diese entsprechen wegen Lemma 7.2 genau den Simplex-Maßen.

8 Ausblick

In [MiPa-1989], Section 5 wird die folgende Frage gestellt.

Problem Existiert eine universelle Konstante $C>0$, so daß für alle normierten isotropen konvexen Körper $K\in\mathcal{K}$ gilt

$$L_K\le C\ ? \tag{62}$$

J. Bourgain konnte zeigen, daß die Trägheitsradien von symmetrischen konvexen Körpern $K\in\mathcal{K}_n$ jedenfalls nicht schneller als $\sqrt[4]{n}\ln n$ wachsen ([Dar-1995]). Weiterhin sind einige Klassen von Körpern bekannt, deren Trägheitsradien beschränkt sind, so z.B. die Zonoide ([MiPa-1989], Proposition 3.6b). Wegen (14) ist die Vermutung (62) richtig, wenn es gelingt zu beweisen, daß alle normierten isotropen Körper die Ungleichungen (8) und (9) erfüllen. In diesem Fall werden die Ausdrücke $m_2(\cdot)$ bzw. $\frac{m_4(\cdot)}{m_2(\cdot)^2}$ durch das reguläre n-dimensionale Simplex Δ_n maximiert. Ein Problem ist, daß die Konkurrenzmenge nicht die Struktur eines topologischen Vektorraums besitzt. Eine Möglichkeit wäre, für einen Körper $K \subset \mathbb{R}^n$ seine Radialfunktion $r_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r_K(u) = \max\{t \geq 0 \, : \, tu \in K\}$$

zu untersuchen. In dem Banach-Raum $C(S^{n-1})$ bestimmt jede Funktion r, die nur positive Werte annimmt, eindeutig eine kompakte, sternförmige Menge mit Sternzentrum 0. Die Volumenbedingung kann durch folgendes Integral über (S^{n-1}, μ_{n-1}) ausgedrückt werden

$$V(r) = \frac{\sigma_{n-1}}{n} \int\limits_{S^{n-1}} r(u)^n \, d\mu_{n-1}(u) \stackrel{!}{=} 1 \, .$$

Die Funktion r bestimmt einen isotropen Körper, wenn die Trägheitsmatrix $T(r)$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, d.h. wenn gilt

$$\begin{aligned} T(r) &= \left(\frac{\sigma_{n-1}}{n+2} \int\limits_{S^{n-1}} r(u)^{n+2} (u|e^i)(u|e^j) \, d\mu_{n-1}(u) \right)_{i,j=1,\ldots,n} , \\ S(r) &= \frac{n}{\operatorname{spur} T(r)} T(r) \stackrel{!}{=} I_n \, . \end{aligned}$$

Das Zielfunktional, das zweite Moment kann ebenfalls durch ein Integral ausgedrückt werden

$$m_2(r) = \frac{\sigma_{n-1}}{n+2} \int\limits_{S^{n-1}} r(u)^{n+2} \, d\mu_{n-1}(u) \longrightarrow \text{max!}$$

Wesentlich unhandlicher ist aber die Bedingung, die der Konvexität des Körpers K entspricht. Notwendig ist nämlich, daß die durch

$$g(\alpha u) = \frac{\alpha}{r(u)} , \quad \alpha \geq 0$$

definierte Stützfunktion konvex (auf $\mathbb{R}^n$) ist, d.h. daß gilt

$$g(\lambda \alpha_1 u_1 + (1-\lambda)\alpha_2 u_2) \leq \lambda g(\alpha_1 u_1) + (1-\lambda) g(\alpha_2 u_2)$$

für alle $u_1, u_2 \in S^{n-1}$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Es wäre interessant zu untersuchen, ob es ein Konvexitätsmaß für Radialfunktionen gibt, d.h. ein Funktional $S : C(S^{n-1}) \to \mathbb{R}$ mit

$$S(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ ist konvex.}$$

Es bleibt allerdings fraglich, ob die Methoden der Variationsrechnung auf dieses Problem angewendet werden könnten.

Eine weitere Möglichkeit wäre, Modellprobleme ähnlich (48) zu untersuchen, allerdings mit besser geeigneten Zielfunktionalen. Einem isotropen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}_n$ werde ein isotropes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_K \in M_{reg}(S^{n-1})$ mit Schwerpunkt 0 zugeordnet. Es wäre ein Funktional $\Lambda : M_{reg}(S^{n-1}) \to \mathbb{R}$ zu definieren, das monoton ist, d.h. für das gilt

$$\Lambda(\mu_{K_1}) \leq \Lambda(\mu_{K_2}) \quad \Longrightarrow \quad m_2(K_1) \leq m_2(K_2)\,.$$

Schließlich könnte versucht werden, Λ zunächst für diskrete Maße zu maximieren und dann die Dichtheit der diskreten Maße auszunutzen. Allerdings haben wir schon in Abschnitt 7 gesehen, welche Schwierigkeiten dabei auftreten können. Insbesondere kann auch ein „vernünftig“ aussehendes Funktional wie (47) an gewissen Stellen nicht differenzierbar sein.

In der Arbeit [ABP-1998] wird eine andere Formulierung der zentralen Grenzwerteigenschaft verwendet. Es werden isotrope symmetrische konvexe Körper K untersucht, die eine ε-Konzentrations-Eigenschaft besitzen. Im Unterschied zur Definition 2.1 wird die Menge aller Richtungen $u \in S^{n-1}$ betrachtet, für die die Integrale der Dichten „nahe“ beieinander liegen. Für ein $\delta > 0$ gilt, daß das Maß μ_{n-1} der Menge aller Richtungen für die

$$\left| \int\limits_{-t}^{t} \varphi_{K,u}(s)\,ds - \int\limits_{-t}^{t} g_{L_K^2}(s)\,ds \right| \leq \delta + 4\varepsilon + \frac{c}{\sqrt{n}}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, größer oder gleich $1 - n\exp(-n\delta^2/50)$ ist. Ein zentrales Argument im Beweis ist die Tatsache, daß die Funktion

$$u \mapsto \int\limits_{-t}^{t} \varphi_{K,u}(s)\,ds$$

Lipschitz-stetig auf S^{n-1} für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Die Symmetrie von K wird benötigt, um den Satz von Busemann anwenden zu können. Es bleibt eine offene Frage, ob auf diese Voraussetzung verzichtet werden kann.

Literatur

[ABP-1998] Milla Anttila, Keith Ball, Irini Perissinaki: The central limit problem for convex bodies, Preprint, 1998, erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.

[Ball-1997] Keith M. Ball: A Modern Introduction to Convex Geometry, in: Silvio Levy (Hrsg.) Flavors of Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[Be-1987] Marcel Berger: Geometry, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987

[BVV-2000] Ulrich Brehm, Hendrik Vogt, Jürgen Voigt: Permanence of moment estimates for p-products of convex bodies, Preprint, TU Dresden 2000

[BreVoi-2000] Ulrich Brehm, Jürgen Voigt: Asymptotics of cross sections for convex bodies, Preprint, TU Dresden 2000, erscheint in Beiträge zur Algebra und Geometrie

[ChowTei-1988] Yuan Shih Chow, Henry Teicher: Probability Theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988 (2nd ed.)

[Dar-1995] Sean Dar: Remarks on Bourgain's Problem on Slicing of Convex bodies, in: Joram Lindenstrauss, Vitali D. Milman (Hrsg.) Geometric Aspects of Functional Analysis, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1995

[Ed-1990] Gerald A. Edgar: Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990

[FLM-1977] Tadeusz Figiel, Joram Lindenstrauss, Vitali D. Milman: The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. **139**, S. 53-94, 1977

[Fra-1999] Mathieu Fradelizi: Hyperplane Sections of Convex Bodies in Isotropic Positions, Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contrib. Algebra Geom.) **40**, S. 163-183, 1999

[Gru-1993] Peter M. Gruber: History of convexity, in: Peter M. Gruber, Jörg M. Wills (Hrsg.) Handbook of Convex Geometry, Vol. A, North Holland, Amsterdam, 1993

[Kö-1993] Konrad Königsberger: Analysis 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993

[Mi-1996] Vitali D. Milman: Surprising Geometric Phenomena in High Dimensional Convexity Theory, in: A. Balog et al. (Hrsg.) European Congress of Mathematics, Budapest, July 22-26 1996, Vol. II, S. 73-91

[MiPa-1989] Vitali D. Milman, Alain Pajor: Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space, in: Joram Lindenstrauss, Vitali D. Milman (Hrsg.) Geometric Aspects of Functional Analysis, LNM **1376**, Springer, 1989

[MiSch-1986] Vitali D. Milman, Gideon Schechtman: Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces, LNM **1200**, Springer, 1986

[Oss-1978] Robert Osserman: The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc. **84**, S. 1182-1238, 1978

[Pi-1989] Gilles Pisier: The volume of convex bodies and Banach space geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1989

[Ra-1991] Svetlozar T. Rachev: Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models, John Wiley & Sons, Chichester, 1991

[Tal-1996] Michel Talagrand: A new look at independence, Ann. Probab. **24**, S. 1-34, 1996

[Voi-2000] Jürgen Voigt: A concentration of mass property for isotropic convex bodies in high dimensions, Israel J. Math. **115**, S. 235-251, 2000

[vWeiz-1997] Heinrich von Weizsäcker: Sudakov's typical marginals, random linear functionals and a conditional central limit theorem, Probab. Theory Relat. Fields **107**, S. 313-324 (1997)

[We-1995] Dirk Werner: Funktionalanalysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Momentungleichungen und zentrale Grenzwerteigenschaften isotroper konvexer Körper“ unter der Betreuung von Herrn Prof. Dr. Jürgen Voigt und Herrn Prof. Dr. Ulrich Brehm selbständig erarbeitet, verfaßt und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Dresden, am 19. 10. 2000